EUCLIDES

TIJDSCHRIFT VOOR DE DIDACTIEK DER EXACTE VAKKEN

ONDER LEIDING VAN

J. H. SCHOGT EN P. WIJDENES

MET MEDEWERKING VAN

Dr. H. J. E. BETH
DEVENTER

Dr. E. J. DIJKSTERHUIS
OISTERWIJK

Dr. G. C. GERRITS
AMSTERDAM

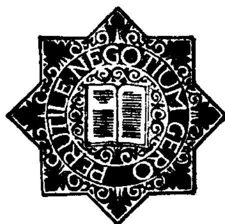
Dr. B. P. HAALMEIJER
AMSTERDAM

Dr. W. P. THIJSEN
BANDOENG

Dr. P. DE VAERE
BRUSSEL

Dr. D. P. A. VERRIJP
ARNHEM

9e JAARGANG 1932/33, Nr. 3



P. NOORDHOFF — GRONINGEN

Euclides, Tijdschrift voor de Didactiek der Exacte Vakken verschijnt in zes tweemaandelijksche afleveringen, samen 18 vel druks. Prijs per jaargang *f* 6.—. Zij, die tevens op het Nieuw Tijdschrift (*f* 6.—) of op „Christiaan Huygens" (*f* 10.—) zijn ingeteekend, betalen *f* 5.—.

Artikelen ter opneming te zenden aan J. H. Schogt, Amsterdam-Zuid, Frans van Mierisstraat 112; Tel. 28341.

Aan de schrijvers van artikelen worden op hun verzoek 25 afdrukken verstrekt, in het vel gedrukt.

Boeken ter bespreking en ter aankondiging te zenden aan P. Wijdenes, Amsterdam-Zuid, Jac. Obrechtstraat 88; Tel. 27119.

INHOUD.

We nemen dus als bewezen aan:

$$S_n = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1} \quad . \quad . \quad . \quad (A).$$

Is (A) juist, dan moet:

$$S_{n+1} = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1} + ar^n \text{ zijn.}$$

Dus: $$S_{n+1} = \frac{a(r^n - 1) + ar^n(r - 1)}{r - 1} = \frac{a(r^{n+1} - 1)}{r - 1}.$$

(A) blijft dus gelden als n vervangen wordt door $(n + 1)$, (A) blijkt ook te gelden voor $n = 2$, immers: $S_2 = \frac{a(r^2 - 1)}{r - 1} = a(r + 1) = a + ar$, dus geldt ze voor $n = 3, 4, 5 \ldots\ldots$

Fraai en zuiver inductief zijn de volgende twee voorbeelden:

II.

$$1 + 3 = 4 = 2^2$$
$$1 + 3 + 5 = 9 = 3^2$$

$1 + 3 + 5 + 7 = 16 = 4^2$; enz. enz. We mogen dus verwachten:

$$1 + 3 + 5 + \ldots\ldots + (2n - 1) = n^2 \ldots\ldots (A).$$

Voegen we aan deze reeks van n termen den volgenden term $(2n + 1)$ toe, dan vinden we:

$$1 + 3 + 5 + \ldots(2n - 1) + (2n + 1) = n^2 + 2n + 1 = (n + 1)^2$$

en mogen nu wel verdere conclusies aan den lezer overlaten.

III.

$$1^3 + 2^3 = 9 = (1 + 2)^2$$
$$1^3 + 2^3 + 3^3 = 36 = (1 + 2 + 3)^2$$

$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 = 100 = (1 + 2 + 3 + 4)^2$; enz. enz. We mogen dus verwachten:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots n^3 = \{\tfrac{1}{2} n (n + 1)\}^2 \ldots (A); \text{ immers:}$$
$$1 + 2 + 3 + \ldots n = \tfrac{1}{2} n (n + 1)$$

Voegen we aan het eerste lid van (A) den volgenden term $(n + 1)^3$ toe, dan komt er:

$$\begin{aligned} 1^3 + 2^3 + \ldots n^3 + (n + 1)^3 &= \tfrac{1}{4} n^2 (n + 1)^2 + (n + 1)^3 \\ &= \tfrac{1}{4} (n + 1)^2 (n^2 + 4n + 4) \\ &= \tfrac{1}{4} (n + 1)^2 (n + 2)^2 \end{aligned}$$

en dat is dus weer formule (A), wanneer n vervangen wordt door $(n+1)$, enz.

IV. Minder fraai is het bewijs voor:

$$1^2 + 2^2 + \ldots . n^2 = {}^1/_6\, n\,(n+1)\,(2n+1) \ldots . . (A),$$

omdat een voorafgaande inductie, zooals bij II en III, ons het resultaat nog niet doet vermoeden.

In de onderstelling dat (A) juist is, vinden we:

$$1^2 + 2^2 + \ldots . n^2 + (n+1)^2 = {}^1/_6\, n(n+1)(2n+1) + (n+1)^2$$
$$= {}^1/_6\,(n+1)\,(2n^2 + n + 6n + 6)$$
$$= {}^1/_6\,(n+1)\,(2n^2 + 7n + 6)$$
$$= {}^1/_6\,(n+1)\,(n+2)\,(2n+3)$$

en dat is weer formule (A), als n vervangen wordt door $(n+1)$; verder blijkt (A) juist te zijn voor $n = 2$, immers:

$$1 + 4 = {}^1/_6 \times 2 \times 3 \times 5;$$

dus geldt (A) voor $n = 3, 4, 5, \ldots .$

V. Voor het bewijs van de formule $S_\infty = \frac{a}{1-r}$ bij een oneindig voortloopende dalende meetkundige reeks maken we gebruik van de ongelijkheid

$$(1+a)^n > 1 + na \ldots . (A), \text{ als } a > o \text{ is.}$$

In den regel wordt deze ongelijkheid aangetoond met de formule voor het binomium. Ik geef echter aan de volgende behandeling de voorkeur. Indien (A) juist is, dan zal ook:

$(1+a)^{n+1} > (1+na)\,(1+a)$ zijn. Of:

$(1+a)^{n+1} > 1 + (n+1)\,a + na^2$, dus a fortiori:

$(1+a)^{n+1} > 1 + (n+1)\,a;$

dus blijft (A) gelden, als n vervangen wordt door $(n+1)$, terwijl we voor $n = 2$ vinden:

$$(1+a)^2 = 1 + 2a + a^2, \text{ dus:}$$
$$(1+a)^2 > 1 + 2a$$

Dus geldt (A) voor $n = 3, 4, 5 \ldots .$

VI. We veronderstellen, dat we met onze leerlingen de reeks:

$$3, \quad 2 \times 3^2, \quad 3 \times 3^3, \quad 4 \times 3^4, \ldots . n \times 3^n$$

gesommeerd hebben, daarna willen we eens het gevonden resultaat:

$$S_n = {}^3/_4\,\{1 + 3^n\,(2n-1)\} \ldots . . (A)$$

zoo algemeen mogelijk verifieeren.

We vinden dan, in de veronderstelling dat (A) juist is:

$$\begin{aligned} S_{n+1} &= {}^3/_4 \{1 + 3^n (2n - 1)\} + (n + 1)\, 3^{n+1} \\ &= {}^3/_4 \{1 + 3^n (2n - 1) + 3^n (4n + 4)\} \\ &= {}^3/_4 \{1 + 3^n (6n + 3)\} \\ &= {}^3/_4 [1 + 3^{n+1} \{2 (n + 1) - 1\}] \end{aligned}$$

en dit is weer formule (A), als n vervangen wordt door $(n + 1)$.

Ten overvloede vinden we door de substitutie $n = 2$ in (A):

$S_2 = {}^3/_4 (1 + 9 . 3) = 21$, wat juist blijkt te zijn.

Dus geldt formule (A) voor iedere geheele, positieve waarde van n.

VII. De recurreerende methode vindt ook toepassing bij de merkwaardige quotiënten.

We moeten bewijzen:

$$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2} b + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1}) \dots (A).$$

Nu is:

$$\begin{aligned} a^{n+1} - b^{n+1} &= a^{n+1} - a^n b + a^n b - b^{n+1} = a^n (a - b) + b (a^n - b^n) = \\ &= (a - b) [a^n + b (a^{n-1} + a^{n-2} b + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1})] = \\ &= (a - b)(a^n + a^{n-1} b + \dots + ab^{n-1} + b^n). \end{aligned}$$

Hiermee is dus weer aangetoond dat formule (A) geldig blijft als n vervangen wordt door $(n + 1)$. Bedenken we dan verder dat de rechter factor van het tweede lid van (A) een volledige homogene n-term is in a en b en van den $(n - 1)$den graad, bestaande uit louter positieve termen, dan blijkt onmiddellijk de juistheid der formule voor $n = 2$, dus ook voor $n = 3, 4 \dots$

VIII. Voor de variatie geven we een meetkundige toepassing.

Een n-hoek is door $(2n - 3)$ elementen bepaald. We kunnen dezen n-hoek veranderen in een $(n + 1)$-hoek, door er een driehoek aan toe te voegen, waarvan een zijde gelijk is aan — en samenvalt met — een zijde van den n-hoek. Deze driehoek is dan verder door 2 elementen bepaald, zoodat dus voor den $(n + 1)$-hoek noodig zijn $(2n - 3 + 2)$ elementen of $[2 (n + 1) - 3]$ elementen, welk resultaat ook kan worden verkregen door in $(2n - 3)$ voor n de waarde $(n + 1)$ te substitueeren. Verder blijkt de vorm $(2n - 3)$ te gelden voor $n = 3$, dus geldt ze eveneens voor $n = 4, 5, 6 \dots\dots$

IX. We gaan bewijzen:

$\log a^n = n \log a$ (voor geheele, positieve waarden van n) .... (A)

We schrijven op:

$\log a^{n+1} = \log a^n \times a = \log a^n + \log a = n \log a + \log a = (n+1) \log a;$

welk resultaat we ook verkrijgen door in (A) n te vervangen door $(n+1)$.

Voor $n = 1$ gaat (A) over in:

$$\log a = \log a$$

Dus geldt (A) voor $n = 2, 3, 4 \ldots\ldots$

X. We gaan bewijzen:

$(a^m)^n = a^{mn}$ (voor geheele, positieve waarden van m en n) . . . (A)

We schrijven op:

$$(a^m)^{n+1} = (a^m)^n \times a^m = a^{mn} \times a^m = a^{m(n+1)};$$

welk resultaat we ook verkrijgen door in (A) n te vervangen door $(n+1)$. Enz.

XI. Als laatste voorbeeld kiezen we de z.g. kleine stelling van *Fermat.*

We gaan bewijzen:

$$n^p - n = \text{een veelvoud van } p \ldots . (A),$$

als p een priemgetal voorstelt.

Nu is $(n+1)^p - (n+1) = n^p + p \cdot n^{p-1} + \frac{p(p-1)}{1 \cdot 2} n^{p-2} + \ldots$

$$+ pn + 1 - n - 1 = n^p - n + \underbrace{\left[p \cdot n^{p-1} + \frac{p(p-1)}{1 \cdot 2} n^{p-2} + \ldots pn\right]}_{(B)}.$$

Van (B) merken we het volgende op:

Alle termen zijn geheel, de factoren in de noemers der breuken moeten dus deelbaar zijn op de factoren der tellers, echter *niet* op den factor p, die in alle termen voorkomt, omdat p een priemgetal is en de grootste factor in de noemers $(p - 1)$ bedraagt. Hieruit volgt dus dat (B) door p deelbaar is en vinden we dus:

$(n+1)^p - (n+1) = n^p - n +$ een veelvoud van p; of in verband met (A):

$(n+1)^p - (n+1) =$ een veelvoud van p.

(A) blijft dus van kracht, als n wordt vervangen door $(n+1)$.

Voor $n = 1$ gaat (A) over in:

$$1 - 1 = 0 \times p$$

Dus geldt (A) voor $n = 2, 3, 4 \ldots\ldots$

Opmerking. Uit de betrekking (A) volgt:
$n\ (n^{p-1} - 1)$ is deelbaar door p en hieruit volgt dan weer dat $(n^{p-1} - 1)$ deelbaar moet zijn door p, als *n geen veelvoud* van p is.

Den Haag, Juli 1931.

Naschrift. Om de beteekenis van de redeneering door volledige inductie goed duidelijk te maken, is het geven van eenige voorbeelden niet voldoende; men zou de leerlingen eigenlijk tot het inzicht moeten brengen, dat deze manier de *eenige* is, om eigenschappen te bewijzen, die gelden voor een willekeurig natuurlijk getal n. Bewijzen, die geen volledige inductie bevatten, zijn òf fout, òf berusten op een hulpstelling, waarbij de volledige inductie gebruikt is of gebruikt moet worden.

Zoo bv. bovenstaand voorbeeld I. Behalve het door den heer Kruytbosch gegevene, is er het bewijs door toepassing van een der merkwaardige quotienten, dat dus ook op volledige inductie berust. Het gebruikelijke bewijs, dat berust op

$$S - rS = a - ar^n$$

kan niet in strengen vorm gebracht worden zonder dat men gebruik maakt van formules, die met volledige inductie worden afgeleid. Ook zeer eenvoudige eigenschappen, als

$$a\ (b_1 + b_2 + \ldots . b_n) = ab_1 + ab_2 + \ldots . + ab_n,$$

kunnen alleen door volledige inductie bewezen worden; daarbij kan dan meteen de *definitie* door volledige inductie ter sprake komen, in casu die van de som van n termen.

J. H. S.

OVER DE ELEMENTEN VAN HET WISKUNDIG DENKEN.

Voordracht gehouden door Dr. D. VAN DANTZIG bij de aanvaarding van het ambt van tijdelijk lector in de Wiskunde en de Theoretische Mechanica aan de Technische Hoogeschool te Delft op Dinsdag, 4 October 1932.

Bijna vierhonderd jaren is het geleden sinds de Tirolsche wiskundige Rhaeticus zijn colleges aan de universiteit te Wittenberg begon met het uitspreken eener „declamatio" of inaugureele rede over Het Nut der Rekenkunde. In deze op 5 Januari 1537 gehouden rede, die, anders dan tegenwoordig gebruikelijk is, niet door Rhaeticus zelf, maar door den beroemden humanist Melanchton was opgesteld, komt de veelgeciteerde uitspraak voor: „De beginselen der rekenkunde, het optellen en aftrekken, zijn absoluut noodzakelijk voor het dagelijksch gebruik en zóó gemakkelijk, dat jongens ze kunnen leeren; de regels der vermenigvuldiging en deeling vereischen weliswaar wat meer aandacht, maar met eenige inspanning worden ze gemakkelijk begrepen." [1]) Datgene wat nog in 1537 wegens zijn moeilijkheid den angst der studenten aan de universiteit opwekte, wordt in onzen tijd door iederen tramconducteur en iederen broodbezorger bij zijn dagelijksche afrekening dagelijks toegepast.

Men zou wellicht meenen, dat de wiskunde zich dientengevolge in de algemeene belangstelling en waardeering der menschen mocht verheugen. Integendeel, een rede over het nut der wiskunde zou ook heden ten dage nog geenszins als volmaakt overbodig gedisqualificeerd mogen worden, al is zij dit op *deze* plaats. Maar zoowel over de wiskunde zelve als over hare beoefenaren heerschen dikwijls nog de zonderlingste opvattingen.

Onder een wiskundige stelt men zich bij voorkeur iemand voor, die over den weg schrijdt met afgemeten passen, die spreekt in uiterst correcte, als het ware met passer en liniaal geconstrueerde volzinnen, iemand zonder éénig temperament, behalve dan een on-

---

[1]) Vgl. Cantor, II 408.

verstoorbaar phlegma, iemand zonder éénige liefde, behalve voor sommen en formules, zonder éénigen humor of éénige phantasie, zonder éénig gevoel voor kunst, behalve wellicht voor een streng geometrisch ornament of hóógstens nog voor een fuga van Bach, kortom een hyperfrik, een levende incarnatie van het oertype van den schoolmeester.

En de wiskunde zelf?

Wat is eigenlijk wiskunde?

Wanneer men een zakenman, jurist of litterator die een tien- of twintigtal jaren geleden de HBS of het gymnasium heeft verlaten over de wiskunde spreekt, is het heel niet onwaarschijnlijk, dat hij zal zeggen: „Wiskunde, o ja, dat heb ik ook geleerd. $a^2 + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$, is het niet?" Van de *beteekenis* der formule zal hij wellicht minder zeker zijn; ik vermoed, dat hij zal aarzelen tusschen „merkwaardig product" en „Pythagoras". Hoe dit ook zij, vrij zeker zullen de associaties, die hij aan het woord „wiskunde" koppelt, zich bewegen tusschen twee polen: „formules" en „sommen". In de gedachten van hen, die nòg minder intensief met de wiskunde hebben kennis gemaakt, treedt het laatstgenoemde woord nog meer op den voorgrond: Voor menigeen toch is een wiskundige iemand, die altijd vrééselijk moeielijke sommen maakt; alleen menschen als Einstein, meent men, doen dat niet: *zij* geven alleen maar sommen op, die ànderen moeten maken.

Vraagt ge den Duitschen schrijver Thomas Mann naar zijn impressie van de wiskunde, dan zal deze eenigszins anders luiden, zooals blijkt uit een passage uit zijn roman „Königliche Hoheit", [1]) waarin hij op waarlijk voortreffelijke wijze den indruk weergeeft, dien het zien van een dictaat-cahier eener wiskunde-studente op een leek maakt; „Was er sah, war sinnverwirrend .... Ein phantastischer Hokuspokus, ein Hexensabbath verschränkter Runen [bedeckte] die Seiten. Griechische Schriftzeichen waren mit lateinischen und mit Ziffern in verschiedener Höhe verkoppelt, mit Kreuzen und Strichen durchsetzt, ober- und unterhalb wagrechter Linien bruchartig aufgereiht, durch andere Linien zeltartig überdacht, durch Doppelstrichelchen gleichgewertet, durch runde Klammern zu grossen Formelmassen vereinigt. Einzelne Buchstaben, wie Schildwachen vorgeschoben, waren rechts oberhalb der umklammerten

---

[1]) Fischer Verlag, Berlin, 1909, pag. 299.

Gruppen ausgesetzt. Kabbalistische Male, vollständig unverständlich dem Laiensinn, umfassten mit ihren Armen Buchstaben und Zahlen, während Zahlenbrüche ihnen voranstanden und Zahlen und Buchstaben ihnen zu Häupten und Füssen schwebten. Sonderbare Silben, Abkürzungen geheimnisvoller Worte waren überall eingestreut, und zwischen den nekromantischen Kolonnen standen geschriebene Sätze und Bemerkungen in täglicher Sprache, deren Sinn gleichwohl so hoch über allen menschlichen Dingen war, dass man sie lesen konnte, ohne mehr davon zu verstehen als von einem Zaubergemurmel."

Gaat men bij de philosophen in de leer, dan zal men veelal een grenzenlooze bewondering voor de wiskunde aantreffen, een vereering, die het werkelijke inzicht dikwijls aanmerkelijk overtreft. Velen, zooals bv. Plato en Kant zien in de wiskundige wetenschap de wetenschap bij uitnemendheid, en in het wiskundige of logische denken den zuiversten vorm van denken die denkbaar is. Komt men daarentegen in een kring van Bollandianen (daaronder versta ik ... de goeden niet te na gesproken! ... hen, die niet verder zien dan Bollands neus lang was), dan zal men waarschijnlijk iets hooren mompelen van „slechte oneindigheid". Bolland zelf wist wel beter, bij tijd en wijle althans, al wist hij dat zèlf niet altijd.

Komt men tenslotte bij een wiskundige en vraag men hèm naar den aard en het wezen der wetenschap, die hij met zooveel ijver en enthousiasme beoefent, dan zal men nog veel uiteenloopender antwoorden krijgen. Van Bertrand Russell bij voorbeeld stamt de bekende uitspraak, dat een wiskundige iemand is, die niet weet waarover hij eigenlijk spreekt, en evenmin, of het waar is wat hij zegt. Hoewel deze uitspraak in zekeren zin volkomen juist is, vrees ik, dat de vrager niet veel wijzer geworden zal zijn. Wendt men zich tot een aanhanger van die richting in de philosophie der wiskunde, die men gewoonlijk de „formalistische" [1]) noemt, zoo zal het antwoord luiden, dat de wiskunde een systeem is van letters en teekens zonder eenige beteekenis, van formules waaruit men volgens bepaalde, nauwkeurig omschreven regels nieuwe formules afleidt, waarop echter zijn tegenstander, de intuitionist, [1]) hoogst veront-

[1]) Leider der formalistische richting is D. Hilbert in Göttingen; leider der intuitionische richting L. E. J. Brouwer te Amsterdam. Voor de voornaamste litteratuur over beide richtingen vgl. b.v. A. Fraenkel, Einleitung in die Mengenlehre, 3. Auflage, Berlin, J. Springer, 1928.

waardigd zal uitroepen, dat dit absoluut niet waar is, dat de wiskunde integendeel een functie van het menschelijk intellect is, en dat de letters en teekens hoogstens (niet eens onontbeerlijke) begeleidende verschijnselen, dat zij „steenen voor brood" [1]) zijn.

Zeer geachte Toehoorders. Ik hoop, dat U niet van mij verwacht, dat ik op de vraag „Wat is eigenlijk wiskunde", die ik in den beginne gesteld heb, nu ook een àntwoord zal geven, want voor een nauwkeurig en diepgaand onderzoek naar het „wezen" der wiskunde zou ik heel veel meer tijd noodig hebben dan mij ter beschikking staat. Het eenige wat ik in de mij toegemeten 45 minuten doen kan, is enkele losse, wellicht al te losse opmerkingen over de quaestie in quaestie maken.

In de vaak verdedigde opvatting, dat er eigenlijk geen ander denken dan wiskundig denken bestaat, schuilt zonder eenigen twijfel een groote mate van overdrijving. Desalniettemin is deze meening toch niet als geheéél onjuist te verwerpen. Immers, wanneer men als het ideaal eener wetenschap beschouwt: het uitspreken van zooveel mogelijk *objectieve* oordeelen, dan moet men ongetwijfeld toegeven, dat dit ideaal in de wiskunde in zeer veel hoogere mate dan in andere wetenschappen bereikt is.

Aan iedere gewaarwording, die we ondergaan, zijn zekere gevoelens van lust en onlust, [2]) en zekere gewaarwordingen van overeenkomst en verschil, van herkenning en onderscheiding verbonden. Deze laatstgenoemde onderscheiden zich van de sterk subjectief getinte lust- en onlustgevoelens (kortweg „affecten" genoemd) door hun hooge mate van objectiviteit. Wanneer ik bv. het woord „perzik" uitspreek, zal wellicht bij sommigen van U een verlangen naar perziken gewekt worden, een lustgevoel dus ten opzichte der verwachting een perzik te zullen eten, maar tevens een onlustgewaarwording ten opzichte van het diep te betreuren feit, dat dit op het oogenblik niet wel mogelijk is. Echter: niet iedereen houdt van perziken, en bij sommigen van U zullen de lust- en onlustgewaarwordingen wellicht heel anders verdeeld zijn. Maar vrijwel iedereen zal het ermede eens

---

[1]) A. Heyting, motto bij het antwoord op een prijsvraag naar een formaliseering der intuitionistische logica, uitgeschreven door het Wiskundig Genootschap te Amsterdam.

[2]) Vgl. in verband met het volgende ook G. Mannoury, Woord en Gedachte. Een inleiding tot de signifika, inzonderheid met het oog op het onderwijs in de wiskunde, Euclides 7 (1930) 1—61; ook afzonderlijk uitgegeven bij P. Noordhoff, Groningen.

zijn, dat twee verschillende perziken doorgaans veel grootere overeenkomst met elkáár vertoonen dan bv. met een framboos, een eikenboom of een ophaalbrug. Met de *subjectiviteit* der affectgewaarwordingen bedoel ik nu het feit, dat deze zoowel van persoon tot persoon als ook in een zelfde individu van moment tot moment sterk kunnen varieeren. De herkennings- en onderscheidingsgewaarwordingen daarentegen zijn zeer *objectief*, d.w.z. zoowel intra-individueel als inter-individueel hebben ze een meer *stabiel* karakter.

Men kan dus als het doel eener wetenschap beschouwen: het zooveel mogelijk elimineeren der lust- en onlustgevoelens, het reduceeren dus tot de herkennings- en onderscheidingsgewaarwordingen. Dit doel is in verschillende wetenschappen in zeer verschillende mate bereikt. Het is bij voorbeeld een bekend verschijnsel, dat in de oekonomische of in de historische wetenschappen de resultaten waartoe een auteur komt, doorgaans in hooge mate afhankelijk zijn van het politieke of religieuse standpunt dat hij inneemt, terwijl dit in de natuurwetenschappen en in de techniek niet of bijna niet het geval zal zijn.

Wanneer men nu zegt, dat een wetenschap slechts zooveel zuivere wetenschap bevat als zij wiskunde bevat, dan wordt daarmede klaarblijkelijk bedoeld, dat de wiskunde, en de wiskunde alléén, absoluut objectief is, dat haar uitspraken dus volkomen onafhankelijk zijn van de affectgewaarwordingen en uit de gewaarwordingen van overeenkomst en verschil alléén kunnen worden afgeleid. De vraag is dus of dit inderdaad het geval is.

Om dit uitbannen der affecten te bereiken, heeft men reeds van ouds in de wiskunde het middel toegepast, de woorden uit de gewone taal, die tallooze associaties aan andere dingen met zich voeren en daardoor dikwijls een sterk affectief karakter hebben, te vervangen door letters of teekens waaraan dit affectieve karakter ten eenenmale vreemd is, maar die gemakkelijk herkenbaar en duidelijk van elkaar onderscheidbaar zijn. Dit vervangen van woorden uit de gewone taal door letters of teekens noemt men *formaliseeren* en zulk een systeem van teekens heet een *formalistisch systeem* of kortweg een *formalisme*. Of men daarbij teekens gebruikt, die met inkt op papier gedrukt zijn, dan wel voorwerpjes, bij voorbeeld blokjes waaraan verschillende soorten haakjes of inkepingen zijn aangebracht, is natuurlijk bijzaak. *Hoofdzaak* is de mogelijkheid, overeenkomst en verschil te constateeren.

Nu is het echter merkwaardig, dat deze mogelijkheid niet noodzakelijk aan het menschelijk intellect gebonden is, dat namelijk een daartoe geconstrueerde machine op blokjes van een bepaalden vorm anders kan reageeren dan op blokjes van een anderen vorm, zooals bij voorbeeld blijkt uit bepaalde soorten van zetmachines, of, eenvoudiger nog, uit een slot met sleutel. Men kan dus zeggen, dat een machine, overdrachtelijk gesproken, ook herkennings- en onderscheidingsgewaarwordingen heeft, en dat een wetenschap eerst dan volledig geformaliseerd en objectief gemaakt zal zijn, wanneer men haar uitkomsten [1]) ook met behulp van een machine uit haar fundamenteele onderstellingen [1]) kan afleiden. En dat dit althans voor een bepaald gedeelte der wiskunde het geval is, leert ons het bestaan der *rekenmachines.* De vraag naar de volledige objectiviteit der wiskunde moet dus althans voor die gedeelten der wiskunde, die volledig geformaliseerd zijn, inderdaad bevestigend worden beantwoord. [2]) Op de vraag of dit voor de geheele wiskunde het geval is kan ik tot mijn spijt hier niet nader ingaan. [3])

Ik wil van deze merkwaardige analogie tusschen een formalisme en een mechanisme niet geheel afstappen zonder U te laten zien, dat zij ook nog in ander opzicht in staat is, ons inzicht te verrijken, al treed ik daarmede eenigszins buiten het eigenlijke onderwerp van bespreking.

Daartoe moet ik Uw aandacht vestigen op het feit, dat eén rekenmachine altijd slechts getallen kan vormen en behandelen die uit een beperkt aantal cijfers bestaan. Laten we, om een zeer eenvoudig voorbeeld te kiezen, een rekenmachine in gedachten nemen, die alleen getallen van twee cijfers, dus de getallen beneden de honderd kan weergeven, maar die daarmede dan ook *alle* hoofdbewerkingen der rekenkunde kan uitvoeren. En laat ons bij deze rekenmachine nu eens een rekenmachinist geplaatst denken, die nooit gewoon heeft leeren rekenen, die dus van het rekenen niets anders weet dan wat zijn machine weergeeft. Hij weet dus bv. dat 07 $\times$ 09 $=$ 63 is, dat

---

[1]) Precieser: de teekens of blokjes die hare uitkomsten resp. onderstellingen voorstellen.

[2]) Ik wil er even op wijzen, dat de resultaten hier en op enkele andere plaatsen met het oog op het elementaire karakter der voordracht ietwat simplistisch zijn weergegeven. Inderdaad is de zaak niet zóó eenvoudig en is de verkregen objectiviteit niet zóó volledig en absoluut als het wel schijnt.

[3]) Vergelijk echter in verband hiermede noot [2]) op blz. 110.

$\sqrt{81} = 09$ is, enz. Ook kent hij de hoofdeigenschappen der rekenkunde, bv. de eigenschap dat een som onafhankelijk is van de volgorde der termen, echter alléén voor zooverre uitsluitend getallen voorkomen, die uit slechts twee cijfers bestaan. Voor onzen machinerekenaar [1]) beteekent dus „getal" hetzelfde wat wij „getal beneden de honderd" noemen. In één opzicht zal zijn theorie der rekenkunde van de onze verschillen: hij zal zeggen, dat niet slechts aftrekking, deeling en worteltrekking somtijds onmogelijke bewerkingen zijn, maar dat ditzelfde ook voor de optelling, de vermenigvuldiging en de machtsverheffing geldt. Dus niet alleen de opgaven 5—7 of 14 : 8 of $\sqrt{2}$ te berekenen zijn voor hem onmogelijk, maar evenzeer de berekening van $73 + 49$ of 15×27 of 3^6, omdat de uitkomsten, naar *wij* zeggen getallen boven de honderd, maar naar *hij* zegt in het geheel geen getallen zijn. Als hij echter voldoende mathematisch begaafd is, zal hij wellicht op het denkbeeld kunnen komen, naast de „echte" of „materieele" getallen 00 tot en met 99 ook nog „phantasiegetallen" in te voeren, die geen echte getallen maar eigenlijk slechts sommen van echte getallen zijn. Hij zou dan bemerken, dat hij met zulke phantasiegetallen precies even gemakkelijk zou kunnen werken als met de echte getallen, en dat zij volkomen analoge eigenschappen bezitten. Ja, hij zou zelfs constateeren, dat verschillende problemen, die oorspronkelijk onoplosbaar waren, niet alleen oplosbaar zijn geworden, maar zelfs een uitkomst geven, die een echt materieel getal is.

Zoo is bv. de som van 52 en 69 geen „echt" getal, namelijk 121, maar de wortel uit die som, namelijk 11, weer wel. Het is dus mogelijk, problemen met de machine te formuleeren, die niet met de machine opgelost kunnen worden, of ook, resultaten met behulp der phantasiegetallen te verkrijgen, die met de machine wèl geformuleerd, maar nìet geverifieerd kunnen worden, [2]) bv. $\sqrt{52 + 69} = 11$.

---

[1]) Analoge beschouwingen gelden voor kinderen die nog slechts tot honderd hebben leeren rekenen. De analogie ware zuiverder indien de didaktiek van het rekenen anders ware en het *rekenen* met getallen beneden de honderd vollediger onderwezen werd, vóórdat de kinderen „alle" getallen leerden kennen.

[2]) In een verhandeling van K. Gödel, Ueber formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandte Systeme, Monatshefte für Mathematik und Physik **38** (1931) 173—198, wordt bewezen dat een analoge eigenschap voor ieder „finiet" formalisme geldt. Daarbij wordt echter met „finiet" aftelbaar oneindig bedoeld, zoodat dus het principe der volledige inductie, d.i. de definitie van het

Nu is het merkwaardig, dat men in de wiskunde op precies dezelfde wijze en om precies dezelfde redenen nieuwe getalsoorten heeft ingevoerd en dat men dezen in den tijd van hun ontstaan steeds een of ander scheldwoord heeft toegevoegd, dat op hun „bastaardnatuur" moest duiden. Behalve de breuken, die dienen om de deeling steeds mogelijk te maken, heeft men de volgende getalsoorten ingevoerd: de *negatieve* getallen, die dienen om de aftrekking steeds mogelijk te maken en oorspronkelijk „valsch" [1]) werden genoemd, de *irrationale,* d.w.z. „onredelijke" [2]) getallen, die de worteltrekking uit positieve getallen mogelijk maken, de „imaginaire", d.w.z. denkbeeldige getallen die ook de worteltrekking uit negatieve getallen mogelijk maken, en die nog door Leibniz [3]) genoemd werden: „het Mirakel der Analyse, het Monstrum der ideale wereld, bijna een amphibie tusschen Zijn en Niet-Zijn", de „ideale" getallen van Kummer, sinds Dedekind kortweg „idealen" genoemd (waarbij het woord ideaal als tegenstelling tot het Duitsche woord real bedoeld is), en die de ondubbelzinnige ontbinding in ondeelbare factoren van getallen als $a + bi\sqrt{5}$ e.d. mogelijk maken, enz. enz. [4])

De beteekenis dezer diverse getalsoorten wordt, naar het mij voorkomt, door de bovengenoemde analogie tusschen formalisme en mechanisme in een helder licht gesteld.

---

begrip „alle", toegepast op de natuurlijke getallen, verondersteld is. Afgezien daarvan kan men het resultaat van Gödel, in onze terminologie uitgedrukt, aldus interpreteeren: het is niet mogelijk, één enkele universeele wiskundemachine te bouwen, die in staat is alle problemen op te lossen, die op de machine geformuleerd kunnen worden; steeds weer moet het menschelijk intellect ingrijpen en nieuwe en ruimere mechanismen ontwerpen, die voorheen onoplosbare problemen oplosbaar doen worden.

[1]) Negatieve getallen heetten bv. bij Stifel ook wel „absurde getallen", bij Cardano „numeri ficti".

[2]) De Grieksche benaming ἄρρητος beteekende oorspronkelijk onuitsprekelijk, verboden, geheim, heilig e.d.; ἄλογος beteekende, evenals de latijnsche vertaling irrationalis, onverstandig, ongerijmd, e.d. Vgl. ook den Engelschen term „surd" (= doof, d.w.z. onhoorbaar) en de termen die Simon Stevin voor irrationale getallen opsomt: absurds, irrationels, irreguliers, inexplicables, sounds. (Deze opmerking, evenals die van noot [2]) dank ik Dr. E. J. Dijksterhuis).

[3]) Leibniz, Math. Werke ed. Gerhardt, V 357.

[4]) In dit verband dienen ook de uit de invariantentheorie bekende „ideale factoren" genoemd te worden. Deze zijn voor symmetrische grootheden door Aronhold en Clebsch, voor alterneerende grootheden door R. Weitzenböck en voor algemeene grootheden door J. A. Schouten ingevoerd.

„Waar het rekenen zonder meer begint houdt in zekeren zin het denken op” heeft Bolland eens gezegd. [1]) Deze opmerking was eigenlijk bedoeld als een (door de woorden „in zekeren zin” ietwat getemperde) hatelijkheid aan het adres der wiskundigen. Maar wanneer we deze onvriendelijke strekking buiten beschouwing laten, moeten we toegeven, dat de woorden van Bolland volkomen juist zijn. Inderdaad: rekenen is geen denken, maar het werk overnemen van de nog niet geconstrueerde wiskundemachine. En indien de wiskundige niets anders deed dan rekenen zonder meer, dan zou Bolland met zijn kritiek volkomen gelijk hebben en zou de uitdrukking „wiskundig denken” een tegenstrijdigheid in zichzelve bevatten. Maar naast het wiskundig *rekenen* bestaat wel degelijk een wiskundig *denken;* een wiskundige is geenszins een rekenmachine, en voor de beoefening der wiskunde is naast logisch inzicht een groote mate van scheppende phantasie noodig, zooals ik zoo aanstonds nader zal toelichten.

Al is echter de wiskunde geen rekenen zonder meer, toch is de dienst, dien ons het rekenen bewijst, geenszins gering te schatten. Immers het groote voordeel, dat het ons geeft, is daarin gelegen, dat we daar waar we *kunnen* rekenen, niet *behoeven* te denken, dat we onzen denkarbeid kunnen sparen tot die plaatsen, waar we met onze formalistische methoden, met het „rekenen zonder meer” niet verder kunnen komen. Nauw verwant aan de uitspraak van Bolland is de van Prof. Mannoury [2]) afkomstige omschrijving van wat wiskunde eigenlijk is, de zuiverste die ik ooit gezien heb en die mèt het antwoord op de in den beginne gestelde vraag tevens den hoogsten lof voor de wiskunde inhoudt:

Wiskunde is zuinig zijn met denken om beter te denken.

Men zou van een wiskundige eigenlijk verwachten, dat hij er vóór alles voor zou zorgen, nooit twee zijner begrippen met elkaar te verwarren, en dat hij ieder begrip slechts in zijn wezenlijksten kern zou gebruiken. Dat hij nooit een kromme lijn recht of een rechte lijn krom zou noemen, dat er geen oneindiger oneindigheid zou bestaan dan de wiskundige oneindigheid, geen krommere

---

[1]) G. J. P. J. Bolland, Het verstand en zijne verlegenheden, Leiden, A. H. Adriani (1903) pag. 66.

[2]) G. Mannoury, Hegelen of Cijferen? Een denk-beeld in spraak en tegenspraak, de Beweging (1905), overgenomen in Wiskunst, filosofie en socialisme, Groningen, P. Noordhoff, 2e druk, (1924) pag. 1—2.

kromme dan een wiskundige kromme, geen puntiger punten dan wiskundige punten. Maar slaat men nu verschillende wiskundeboeken op, dan kan men lezen, dat de zoogenaamd oneindig verre punten in het geheel niet buitenissig ver weg gelegen behoeven te zijn, ja, dat zij bij een doelmatig gekozen wijze van meten (bv. na invoering eener elliptische maatbepaling) niet verder dan bv. één lengte-eenheid van een in het eindige gelegen punt verwijderd zijn, dat oneindig kleine getallen niets anders zijn dan doodgewone getallen, aan welker kleinheid slechts geen grens gesteld wordt. Men kan vinden, dat de schrijver den lezer verzoekt, een *paar* van twee diametraal op een bol gelegen punten in het vervolg één enkel punt te noemen, en een grooten cirkel op een bol, dus een onmiskenbaar kromme lijn, met „rechte" aan te spreken. Niet slechts een puntenpaar, maar tal van andere meetkundige of zelfs niet-meetkundige formaties worden bij tijd en wijle „punten" genoemd, bij voorbeeld lijnen of vlakken, groepen van een zeker aantal getallen, ja zelfs geheele mechanismen of machines met een zeker aantal graden van vrijheid. In werken over topologie kan men bij voorbeeld vinden, dat een vierkant zoowel als een driehoek „cirkel" en een kubus of eenig ander veelvlak „bol" genoemd wordt. Men kan er de beschrijving lezen van een meetkundige formatie [1]) die ontstaat door in een kubus een drietal prismatische doorboringen te maken, in de richting van elke ribbe één, daarna een vierentwintigtal smallere, eveneens prismavormige, doorboringen, dan 192 nog smallere, enzoovoorts, totdat er ten slotte iets overblijft, dat doet denken aan het ijzergeraamte eener oneindig gecompliceerde betonconstructie. Dit geraamte, waaraan toch zeker niets kroms te ontdekken valt, heet dan de „universeele kromme" en wordt als het oertype en de stammoeder van alle denkbare kromme lijnen beschouwd.

Is het dan te verwonderen, dat zoo menige philosoof zich met een schouderophalen en een gevoel van weerzin van de wiskunde afwendt, dat hij gaat spreken van een „slechte oneindigheid", dat hij gaat zeggen dat wiskundig denken, wel verre van het denken bij uitnemendheid te zijn, in het geheel geen denken genoemd mag worden, maar een wellicht zelfs niet geheel en al ongevaarlijke vorm

---

[1]) Voor een exacte definitie vgl. K. Menger, Allgemeine Räume und Cartesische Räume I, Proc. Kon. Ak. **9** (1926) 476—482 en van denzelfden âuteur „Dimensionstheorie", Leipzig, B. G. Teubner. (1928).

van dementia praecox is, en dat hij slechts een ironischen glimlach over heeft voor iemand die wil bewijzen dat er geen tegenstrijdigheden *mogelijk* zijn in dit vat vòl van tegenstrijdigheden?

Het zou mij thans te ver voeren, als ik U ervan wilde overtuigen, dat het ongelijk in dezen tòch aan de zijde dier philosophen ligt, dat al deze genoemde tegenstrijdigheden slechts *schijnbare* tegenstrijdigheden zijn en dat een wiskundige, wel verre van uit onkunde of verstandsverbijstering zijn begrippen op een hopelooze manier met elkaar te verwarren, er zich volkomen van bewust is wat hij doet, er zich ter dege rekenschap van geeft of het in een bepaald geval al dan niet geoorloofd is, een poes een olifant of een cirkel een rechte lijn te noemen. Er wordt inderdaad een niet geringe mate van wiskundig inzicht vereischt om te begrijpen, dat Bollands omschrijving [1]) „eindelooze reeksen, waarvan het eindige eindeloos eindig is, en het eindige dus geen einde neemt" volkomen correct is en dat deze omschrijving desalniettemin géén innerlijke contradictie inhoudt. Ik wil er voor het oogenblik mee volstaan te zeggen, dat een wiskundige, wanneer hij bij voorbeeld de kegelsneden van een plat vlak als de punten eener vijfdimensionale ruimte beschouwt, daarmede slechts tot uitdrukking wil brengen, dat tusschen deze kegelsneden volkomen soortgelijke betrekkingen bestaan als tusschen de punten der genoemde ruimte.

Hier is de plaats waar mijns inziens het *creatieve* element in de wiskunde verborgen ligt, dat Henri Poincaré [2]) (m.i. ten onrechte) uitsluitend in het principe der volledige inductie zocht. Immers een bepaald formalisme of mechanisme kan zekere gewaarwordingen van overeenkomst of verschil weergeven. Steeds bestaat echter de mogelijkheid, dat het menschelijk intellect in de *voortbrengselen* zelve van dit formalisme weer nieuwe regelmatigheden constateert, d.w.z. nieuwe gewaarwordingen van overeenkomst en verschil ondergaat. Deze nieuwe gewaarwordingen kunnen dan weliswaar weer door een daartoe passend geconstrueerd nieuw formalisme weergegeven worden, maar in het algemeen *niet* door het oude formalisme. Als ik een (natuurlijk ietwat hinkende) vergelijking mag gebruiken,

---

[1]) G. J. P. J. Bolland, l. c. pag. 16.

[2]) H. Poincaré, La science et l'hypothése, Paris, Flammarion, 1906, pag. 28; Sur la nature du raisonnement mathématique, Revue de métaphysique et de morale, 2 (1894), 371—384. Vgl. hierbij ook: G. Mannoury, Methodologisches und Philosophisches zur Elementar-mathematik, Haarlem, P. Visser Azn., 1909, pag. 80—88.

zou ik willen wijzen op een zetmachine, die, naar we reeds opmerkten, de afzonderlijke letters, cijfers en leesteekens kan „herkennen". Maar natuurlijk zal deze machine niet kunnen uitmaken, of het rijmschema van een quatrijnenbundel *a b b a* dan wel *a a b b* is, terwijl er toch zeer wel een „dichterscontrôlemachine" denkbaar is, die elk onjuist of onzuiver rijm onverbiddelijk signaleert.

Zoo is het ook, wanneer men opmerkt, dat tusschen de kegelsneden van het platte vlak precies „dezelfde" relaties bestaan als tusschen de punten der genoemde vijfdimensionale ruimte. Dit is weliswaar een formaliseerbare dus objectieve opmerking, maar het daartoe strekkende formalisme ligt in zekeren zin op een hooger plan dan het oorspronkelijk gebruikte. Om dit nieuwe formalisme te maken is een creatieve daad van het menschelijk intellect noodig, en inderdaad bestaan vele van de geniaalste scheppingen van het mathematische denken juist in het ontdekken van dergelijke regelmatigheden, dergelijke overeenkomsten tusschen schijnbaar totaal verschillende begrippen. Laat mij dit nog even met één enkel voorbeeld toelichten, dat weliswaar niet aan de wiskunde zelf, maar aan de physika ontleend is, maar waarvoor ik, als mij meer tijd ter beschikking stond, ook tallooze voorbeelden uit de zuivere wiskunde zelve in de plaats zou kunnen stellen.

De plaats van een puntvormig lichaam in de ruimte wordt bepaald door drie getallen, de drie coördinaten of graden van vrijheid. Het blijkt echter dikwijls nuttig te zijn, teneinde niet slechts de plaats maar ook den bewegingstoestand van het lichaam te kunnen weergeven, dit dimensieaantal te verdubbelen, dus den stand met bijbehoorenden bewegingstoestand van het lichaam voor te stellen door een punt in een ruimte van zes dimensies. De volledige beweging van het lichaam in den loop van den tijd wordt dan weergegeven door een bepaalde lijn in deze zesdimensionale ruimte. Heeft men nu 1 cm^3 van een gasmengsel bij normale temperatuur en druk, dan bevat dit, naar U weet, ongeveer 27 trillioen moleculen. Beschouwt men deze moleculen als puntvormige lichamen, wat voor vele problemen uit de thermodynamika zonder bezwaar kan geschieden, dan wordt de volledige beweging van het gasmengsel dus weergegeven door een systeem van 27 trillioen lijnen in de genoemde zesdimensionale ruimte.

Nu kan men echter ook, en U zult me, naar ik hoop, toegeven, dat dit een gedachtesprong van een verbijsterende stoutmoedigheid

is, het geheele gasmengsel als één enkel mechanisch systeem, als een soort van hypermolecule beschouwen, dat dus 3 $\times$ 27 trillioen graden van vrijheid heeft. Dienovereenkomstig kunnen de veranderingen van het gasmengsel in den tijd worden beschreven door één enkele kromme lijn, die gelegen is in een ruimte, waarvan het dimensieaantal niet minder dan 6 $\times$ 27 trillioen bedraagt! Door het waarschijnlijkste verloop dezer kromme lijn in die ruimte van zoo verbijsterend dimensietal na te gaan blijkt het mogelijk te zijn, niet slechts de elementaire waarneembare veranderingen in temperatuur en druk vooraf te berekenen, maar zelfs bepaalde verschijnselen te verklaren, die door de beschrijving in de zesdimensionale ruimte niet konden worden weergegeven.

Is niet in dezen schrikbarenden saltomortale uit één cm^3 van onze doodgewone alledaagsche driedimensionale ruimte naar die denkbeeldige ruimte van zóó onvoorstelbaar vele afmetingen, en vooral in de *verwachting*, door dezen sprong bepaalde thermodynamische verschijnselen te kunnen verklaren, [1]) een zóó groote mate van phantasie en van kunstenaarschap verborgen, als men wel zeer zelden bij een dichter of een schilder zal aantreffen?

Is de wiskunde niets anders dan een machinaal rekenen met eens voor al opgestelde formalismen? Is de wiskundige niets anders dan een machinemensch, of, sterker nog, dan een surrogaat voor zoo'n denkbeeldige machine, die slechts dáárom niet geconstrueerd wordt, omdat een levende wiskundige vooralsnog goedkooper is?

Dames en Heeren, uit het voorgaande zal U gebleken zijn, dat dit alles zonder eenigen twijfel *niet* het geval is. De wiskundige is *niet* slechts de slaaf zijner constructies, en hij behoeft *niet* te vreezen ooit te worden afgeschaft, zooals men de paarden heeft afgeschaft om ze te vervangen door automobielen en tractoren. Want al is de wiskunde met een machine te vergelijken en de wiskundige met den man die de machine bedient, toch is daarmede de beteekenis van den wiskundige niet volledig weergegeven. Immers de machine moet

---

[1]) Zoo is het bv. J. von Neumann nog onlangs (Januari 1932) gelukt, door de theorie der integratie volgens Lebesgue op volumina dezer ruimte toe te passen, de z.g. „quasi-ergoden-hypothese" van Boltzmann en Ehrenfest te bewijzen, een opgave, die dezelfde auteur nog in 1929 als „beim heutigen Stande der Wissenschaft absolut unbezwingbar" gekenschetst had.

ook gebouwd, ontworpen, geconstrueerd worden. En het ontwerpen van dergelijke machines of liever formalismen is eveneens het werk van den wiskundige. Deze scheppende kracht van den wiskundige wordt dikwijls miskend. De wiskunde is niet te vergelijken met een doode taal, is niet een agglomeraat van stellingen en methoden, die door Euclides, Descartes, Leibniz en nog eenige anderen zijn opgesteld en die men slechts mechanisch heeft toe te passen. Noodzakelijk moet steeds weer de menschelijke phantasie ingrijpen om nieuwe en ruimere omvattendere formalismen uit te denken, waarmede men problemen kan oplossen, die met het oude mechanisme wèl gesteld maar nìet opgelost konden worden. [1])

Niet slechts het groote belang van den levenden wiskundige ligt in zijn scheppende phantasie, maar ook de charme, die de beoefening der wiskunde voor hem heeft. En dit geldt zelfs daar, waar hij geenszins bezig is, nieuwe formalismen of nieuwe theorieën te ontwerpen, maar ook wanneer hij slechts bestaande theorieën en methoden op bepaalde problemen toepast. Immers, wanneer men een bepaald probleem wil oplossen, al is het nog zoo eenvoudig, dan zijn er bijna steeds twee wegen, die men kan volgen: men kan de bestaande methoden die men geleerd heeft eenvoudig machinaalweg toepassen, totdat er de oplossing op volgt, maar men kan ook het opgegeven probleem individueel beschouwen, er zich in verdiepen totdat het een eigen leven verkrijgt en zijn betrekking tot geheel andere problemen dan waaraan men oorspronkelijk gedacht heeft, openbaart. In den regel zal men dan een oplossing vinden, die niet slechts korter en eenvoudiger is dan de met de bekende methoden verkregene, maar die bovendien een dieper inzicht in de beteekenis van dit speciale probleem en ook een wezenlijk grooter aesthetisch genot geeft. En geldt niet ditzelfde voor iedereen die scheppend constructief werk moet verrichten, in het bijzonder ook voor den ingenieur? Onverschillig of hem opgedragen wordt een locomotief te ontwerpen of een vakwerkconstructie of een schakelschema voor een transformatorhuisje, is het niet steeds zóó, dat hij, ja, vóór alles en in de eerste plaats de bestaande methoden door en door moet kennen, en hun mérites moet kunnen overzien, maar dat hij door slaafs deze methoden te volgen nòch het beste bereikbare resultaat, nòch de grootste bevrediging voor zich zelve bereikt? Ook

---

[1]) Vgl. noot [2]), blz. 110.

hij moet de speciale opgave die hem gesteld is individueel beschouwen, met de typische eigenaardigheden en de karakteristieke moeilijkheden juist van *deze* opgave rekening houden, zijn phantasie vrij laten werken en deze tòch laten beheerschen door zijn weten van wat mogelijk en wat niet mogelijk is, om zóó tot een oplossing te komen, die speciaal aan *zijn* opgave aangepast is. En ook hij zal daarbij het aesthetische genot van den scheppenden kunstenaar ondervinden.

Scheppend kunstenaar heb ik gezegd, want dit is de karakteristiek, die de ontwerpende ingenieur met den wiskundige gemeen heeft: hij is machinemensch en scheppend kunstenaar in éénen.

EENIGE OPMERKINGEN NAAR AANLEIDING VAN EEN ARTIKEL VAN DEN HEER BETH

DOOR

B. P. HAALMEIJER.

In zijn artikel „De denkmoeilijkheden gelegen in het functiebegrip en in de grafische voorstellingen" (1e afl. van dezen jaargang), noemt de heer Beth drie partijen onder de leeraren in de wiskunde, nl. zij die op grond van ongunstige resultaten, de graphische voorstellingen uit het program der H. B. S. B. willen schrappen, zij die de invoering van dit onderwerp slechts beschouwen als een eersten stap op den weg van de vernieuwing van het wiskunde-onderwijs en ten slotte een kleurlooze middenstof. Zijn deze kategorieën als allen omvattend bedoeld, dan moet ik mijzelf tot de laatstgenoemde rekenen. Indien ik hier eenigen invloed kon uitoefenen, zou ik wenschen dat deze in beide richtingen remmend werkte.

Hoewel de heer Beth een open oog heeft voor de nieuwe en groote moeilijkheid der infinitesimaalrekening, beschouwt hij blijkbaar toch de behandeling van de beginselen hiervan als noodzakelijke consequentie van de behandeling der graphische voorstellingen en het functiebegrip. Vermoedelijk zijn velen met mij niet van die noodzakelijkheid overtuigd en in het volgende worden beide onderwerpen dan ook afzonderlijk beschouwd.

Misschien klinkt erg ouderwetsch de bekentenis dat ons programma voor stelkunde mij nog niet zoo slecht lijkt, al kunnen we waarschijnlijk allen wel onderdeelen noemen; die we besnoeid of geschrapt wenschen. Langzaam aan kan dat gebeuren en de vrijkomende tijd aan andere zaken worden besteed. Een gelukkige wijziging in de laatste twintig jaren is m.i. juist de geleidelijke invoering van de behandeling der graphische voorstellingen en het functiebegrip, mits men deze behandeling in de eerste plaats beschouwt als steun voor het stelkunde-onderwijs. Zelf gebruik ik op school de graphieken reeds langer dan tien jaar en doe er ook geleidelijk meer aan, echter vrijwel steeds ter illustratie, uitbreiding en mogelijk verdieping van algebraïsche onderwerpen die reeds

besproken zijn. De juiste didaktische methode lijkt mij om te beginnen met een bijzonder geval, b.v. het oplossen van een vergelijking en dit dan later nog eens te bezien vanaf het meer algemeene standpunt der functioneele afhankelijkheid. Zelfs zou dit nog mijn meening zijn als er gevaar bestond dat de algemeene beschouwingen in het gedrang kwamen ten koste van de bijzondere gevallen. De vergelijking is misschien nog steeds een geschikt en voldoend belangrijk onderwerp om kern van onze schoolalgebra te blijven.

De heer Beth betoogt op theoretische gronden dat bij flinke inspanning van docent en leerlingen, graphische voorstellingen en functiebegrip niet te moeilijk voor onze scholen zijn. Op empirische gronden deel ik deze meening. In de tweede klasse kost de behandeling veel tijd en hebben ook goede leerlingen er moeite mee. Komt men er echter in de hoogere klassen op terug en gaat men er verder mee, dan loopt alles veel vlotter. Bepaald ongewenscht lijkt mij echter om met graphieken enz. te beginnen vóór het midden van het tweede leerjaar. De eerste anderhalf jaar lijken noodig om het fundament te leggen voor een voldoende technische vaardigheid. Verdeeling der attentie is hiervoor schadelijk.

De verwondering van den heer Beth over de kritiek op het eindexamenvraagstuk 1931 No. 3, kan ik niet deelen. Formeel heeft hij natuurlijk gelijk als hij de graphische voorstellingen een deel der analytische meetkunde noemt en dus geen grens erkent. Echter bedoelen sommigen onzer met „graphische voorstellingen" het stukje der analytische meetkunde dat we op de H. B. S. behandelen tot steun van ons algebra-onderwijs, en wanneer we hiertegenover van analytische meetkunde spreken, bedoelen we de rest van dat deel der wiskunde. Nu kan men wel een algebravraagstukje samenstellen dat correspondeert met het gelaakte onderdeel van de examenopgave, maar het wordt vrij gezocht en het blijft waarschijnlijk dat de auteur van het vraagstuk meer door de meetkundige dan door de algebraïsche zijde in beslag is genomen.

In genoemd artikel komt de heer Beth nogmaals op voor de invoering der infinitesimaalrekening op onze scholen. Persoonlijk zou ik met klem tegen die invoering willen waarschuwen. De heer Beth geeft toe dat het limietbegrip lastig is (ongetwijfeld denkt hij hierbij aan een strenge bepaling), maar, zegt hij, was dat begrip *te* lastig, dan zou ons geheele wiskunde-leerplan voor de hoogere

klassen één groote fout zijn. Gaat deze uitspraak niet wat ver? Op onze lagere en middelbare scholen zijn waarschijnlijk weinig leerlingen die een bevredigend antwoord kunnen geven op de vraag „Wat is een getal?” en moet men *daarom* zeggen dat de programma’s voor reken- en stelkunde één groote fout zijn? In den loop van het derde leerjaar en van tijd tot tijd gedurende de volgende jaren tracht ik in de wiskunde-lessen mijn leerlingen eenig gevoel bij te brengen en te versterken van wat een limiet is, toegelicht op de lijn der reëele getallen, maar zonder strenge definitie. Hierbij heb ik mij wèl bevonden en van begripsverwarring weinig gemerkt. Bij de mechanica heb ik het eenige malen geprobeerd met een strengere behandeling, gewoonlijk met zeer matig resultaat bij de doorsneeleerling.

Als concessie aan den tijdgeest en omdat men nu eenmaal wat kritischer is bij het werken voor de drukpers dan bij het spreken in de klas, heb ik in mijn leerboek der vlakke meetkunde een en ander over limieten op vrij strenge wijze behandeld en toegepast. Echter zie ik, onder ons gezegd, op tegen de uren in het komende voorjaar, wanneer ik voor de eerste maal in de derde klas deze zaken moet bespreken en nog meer tegen het onderzoek van de betreffende kennis mijner leerlingen. Maar genoeg van deze confidenties, de bedoeling is slechts als mijn overtuiging te geven dat een strenge limietbepaling voor de meerderheid mijner leerlingen te ver gaat en waarschijnlijk zijn er wel collega’s die een dergelijke opinie hebben.

Aan de hoogescholen, vooral bij min of meer practische oriëntatie, zou men vermoedelijk met genoegen zien dat de H. B. S. een begin der infinitesimaalrekening gaf, maar zouden wij wel in belangrijke mate rekening moeten houden met dien wensch? De meerderheid onzer leerlingen zal later niet meer differentiëeren of integreeren en zelfs maar heel weinig wiskunde gebruiken. Voor hen beteekent ons onderwijs in de eerste plaats scholing van het intellect en deze kan vermoedelijk even goed zonder infinitesimaalrekening worden bereikt. Behandeling hiervan toch zou vaak neerkomen op het bijbrengen van een beetje techniek.

Anders zou deze geheele zaak komen te staan als de selectie der leerlingen aanmerkelijk strenger werd, iets waar velen in theorie vóór zijn, maar in de practijk niet aandurven.

MEETKUNDIG BEWIJS VAN EEN STELLING BETREFFENDE DE ZWAARTELIJN

DOOR

M. J. DE LANGE.

In zijn „Bijdragen tot de methodologie van de beginselen der Meetkunde" schrijft de heer Ir. D. J. Kruytbosch op blz. 174 o.m. het volgende:

„Is D het midden van de zijde AC van △ ABC en EF een lijn // AC, dan zal het snijpunt G van EF en BD het midden van EF zijn. We kunnen die eigenschap *niet* bewijzen *zonder* toepassing van evenredigheidsstellingen."

Ik meen voor deze eigenschap een meetkundig bewijs gevonden te hebben.

We bewijzen eerst de volgende hulpstelling:

Als in een vierhoek ABCD, $\angle$ ADB = $\angle$ ACB, dan is ook $\angle$ BDC = $\angle$ BAC.

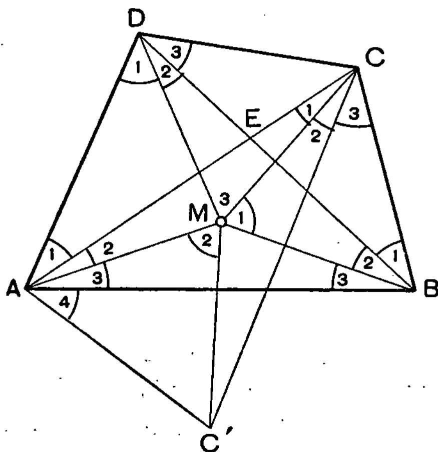


Fig. 1.

Deze stelling wordt meestal zóó bewezen, dat uit het gegeven $\angle$ ADB = $\angle$ ACB wordt besloten, dat ABCD een koordenvierhoek is, waaruit dan volgt, dat $\angle$ BDC = $\angle$ BAC is, omdat ze op dezelfde boog staan. Hierbij wordt echter gebruikt de stelling, dat een middelpuntshoek evenveel hoekgraden bevat, als de boog, waarop bij staat booggraden, een stelling, waarbij gebruik gemaakt wordt van evenredigheid van hoeken en bijbehoorende bogen.

Ik geef hiervoor het volgende bewijs: (zie fig. 1).

Gegeven: $\angle D_{12} = \angle C_{123}$.......

Te bewijzen: $\angle D_3 = \angle A_{23}$ zonder gebruik te maken van de stelling van den omtrekshoek.

Bewijs. Zij M het middelpunt van den omgeschreven cirkel van $\triangle$ ABD, dus MA = MD = MB.

Uit $\triangle$ ADE en $\triangle$ BCE volgt in verband met het gegeven
$\angle A_1 = \angle B_1$ (1)

Nu is $\angle A_2 + \angle A_1 + \angle B_2 = \angle A_{12} + \angle B_2 = \angle D_1 + \angle D_2 = \angle D_{12}$. Dus in verband met (1) ook:
$\angle A_2 + \angle B_1 + \angle B_2 = \angle D_{12}$, of $\angle A_2 + \angle B_{12} = \angle C_{123}$. (2)

Trek nu MC^1 zóó, dat $\angle M_2 = \angle M_1$ en $MC^1 = MC$, dan is $\triangle AMC^1 \cong \triangle BMC$ dus $AC^1 = BC$ en $\angle A_{34} = \angle B_{12}$.

Uit (2) volgt dus $\angle A_2 + \angle A_{34} = \angle C_{123}$; $\angle A_{234} = \angle C_{123}$, dus $\triangle CAC^1 \cong \triangle ACB$, want CA = AC, AC^1 = CB en $\angle CAC^1 = \angle ACB$ ($\angle A_{234} = \angle C_{123}$)

dus CC^1 = AB. Nu is ook $\triangle C^1MC \cong \triangle AMB$ (2 gelijkb. $\triangle\triangle$ die de basis en den tophoek gelijk hebben; dit laatste wegens $\angle M_1 + \angle M_4 = \angle M_2 + \angle M_4$).

Dus is MC = MA = MB = MD.

De vierhoek is nu verdeeld in een aantal gelijkbeenige driehoeken, en daaruit blijkt nu het gestelde gemakkelijk; immers:
$\angle M_1 = 2 \angle A_{23}$ (2 $\times$ stelling v. d. buitenhoek).
$\angle D_3 = \angle D_{23} - \angle D_2 = 90^\circ - \frac{1}{2} \angle M_3 - (90^\circ - \frac{1}{2} \angle M_1 - \frac{1}{2} \angle M_3) = \frac{1}{2} \angle M_1 = \angle A_{23}$.

In de figuur ligt het punt M zoowel binnen $\triangle$ ABD als binnen

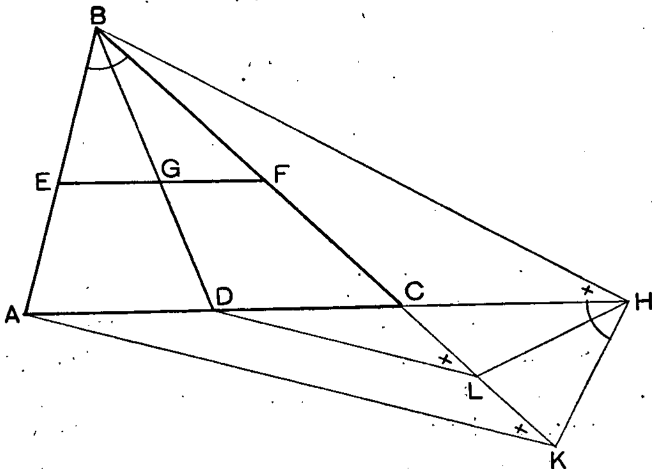


Fig. 2.

△ ABC, maar het is gemakkelijk in te zien, dat het bewijs ook doorgaat voor het geval, dat M aan den anderen kant van AC ligt. Met behulp van het voorgaande bewijzen we nu de stelling aldus:

Gegeven: (zie fig. 2) △ ABC; AD = DC; EF // AC.

Te bewijzen: EG = GF zonder evenredigheden.

Bewijs: Maak CH = BF, CK = EF. Dan is △ CKH ≌ △ FEB (2 zijden en de ingesl. hoek, want ∠ HCK = ∠ BFE volgens gegeven).

dus is ∠ CHK = ∠ CBA, of ∠ AHK = ∠ ABK.

Uit de hulpstelling volgt dan dat in vierhoek AKHB, ∠ AHB = ∠ AKB.

Trek HL zóó, dat ∠ CHL = ∠ FBG dan is in vierhoek DLHB ∠ DHL = ∠ DBL, en dus, weer volgens de hulpstelling ∠ DLB = ∠ DHB.

Dus is in △ AKC ∠ L = ∠ K, dus DL // AK. Daar AD = DC is ook KL = LC en dus ook FG = GE (daar △ BGF ≌ △ HLC).

Zooals men ziet, is dit bewijs veel omslachtiger dan het gewone door toepassing van evenredigheden, maar er blijkt afdoende uit dat de bewering in den aanvang van dit artikel vervangen dient te worden door: „is niet gemakkelijk te bewijzen zonder evenredigheden". Zelfs is m.i. het vermoeden gewettigd dat alle meetkundige eigenschappen (waaronder hier dan verstaan moet worden eigenschappen, waarbij geen sprake is van oppervlakken, verhoudingen van lijnstukken enz.) meetkundig bewezen kunnen worden, totdat een streng bewijs van het tegendeel geleverd is.

NASCHRIFT.

De schrijver had zich de moeite kunnen besparen, verbonden aan het vinden van het ingewikkelde bewijs zijner hulpstelling. De stelling omtrent den omtrekshoek in een cirkel berust namelijk geenszins op evenredigheden. Formuleert men de stelling aldus: een omtrekshoek in een cirkel is de helft van den middelpuntshoek van den boog, waarop die omtrekshoek staat (en deze formuleering is voor alle toepassingen voldoende) dan blijkt dit duidelijk.

In het algemeen kan gezegd worden, dat de Nederlandsche leergang der meetkunde bij uitstek ongeschikt is, om te doen zien, op welke begrippen (axioma's, vorige stellingen) een stelling of een bewijs berust.

J. H. S.

EEN PAAR MOEILIJKE ALGEBRA-VRAAGSTUKKEN

DOOR

J. H. SCHOGT.

I. Bepaal, voor welke reëele waarden van m de wortels van

$$\frac{m}{x} = \frac{x-1}{x-m}$$

(beschouwd als vergelijking in x) reëel zijn.

Oplossing. De vergelijking is gelijkwaardig met

$$\frac{m(x-m)-(x-1)x}{x(x-m)} = 0$$

of met

$$\frac{-x^2+(m+1)x-m^2}{x(x-m)} = 0.$$

Wortels hiervan zijn de van 0 en m verschillende waarden van x, die voldoen aan

$$x^2-(m+1)x+m^2 = 0$$

dat zijn

$$x_1 = \frac{m+1+\sqrt{(m+1)^2-4m^2}}{2} = \frac{m+1+\sqrt{-3m^2+2m+1}}{2}$$

en

$$x_2 = \frac{m+1-\sqrt{(m+1)^2-4m^2}}{2} = \frac{m+1+\sqrt{-3m^2+2m+1}}{2}$$

voorzoover die van 0 en van m verschillen.

Oplossing der vergelijkingen

$$x_1 = m \qquad\qquad x_2 = m$$

leidt tot

$$-3m^2+2m+1 = (m-1)^2$$
$$4m^2-4m = 0$$
$$m_1 = 1 \qquad\qquad m_2 = 0$$

Hiervan blijkt m_1 te voldoen aan $x_1 = m$ en $x_2 = m$, m_2 aan $x_2 = m$.

Oplossing van de vergelijkingen

$$x_1 = 0 \qquad\qquad x_2 = 0$$

leidt tot

$$-3m^2 + 2m + 1 = (m+1)^2$$
$$m_3 = 0$$

welke blijkt te voldoen aan $x_2 = 0$, maar niet aan $x_1 = 0$.

Wortels der vergelijking zijn dus

$$x_1 = \frac{m + 1 + \sqrt{-3m^2 + 2m + 1}}{2} \quad \text{behalve voor } m_1 = 1 \text{ en } m_3 = 0$$

$$x_2 = \frac{m + 1 - \sqrt{-3m^2 + 2m + 1}}{2} \quad \text{behalve voor } m_2 = m_3 = 0.$$

De voorwaarde, dat deze uitdrukkingen reëele getallen voorstellen, terwijl m reëel is, luidt

$$-3m^2 + 2m + 1 \geqq 0$$
$$(3m + 1)(-m + 1) \geqq 0$$
$$-\tfrac{1}{3} \leqq m \leqq 1.$$

Daar voor $m = 0$ de vergelijking de oplossing $x = 1$ toelaat (dat is bovenstaande x_1) is het antwoord op de vraag

$$-\tfrac{1}{3} \leqq m \leqq 1.$$

II. Dezelfde vraag voor:

$$\frac{x-1}{2x-1} + \frac{2x+1}{x+1} = m.$$

Oplossing. De vergelijking is gelijkwaardig met

$$\frac{(x-1)^2 + (2x+1)(2x-1) - m(x-1)(2x-1)}{(2x-1)(x-1)} = 0.$$

Hieraan voldoen de van $\tfrac{1}{2}$ en 1 verschillende waarden van x, die voldoen aan

$$(x-1)^2 + (2x+1)(2x-1) - m(x-1)(2x-1) = 0$$

of

$$(-2m + 5)x^2 + (3m - 2)x - m = 0.$$

Hieraan voldoet:

a) als $-2m + 5 = 0$ of $m_1 = 2\tfrac{1}{2}$:

$$x_1 = \frac{m}{3m-2} = \frac{2\tfrac{1}{2}}{5\tfrac{1}{2}} = \frac{5}{11}.$$

b) als $m \neq 2\frac{1}{2}$

$$x_2 = \frac{-3m + 2 + \sqrt{m^2 + 8m + 4}}{-4m + 10}$$

en

$$x_3 = \frac{-3m + 2 - \sqrt{m^2 + 8m + 4}}{-4m + 10}.$$

Aan de gegeven vergelijking voldoen dus x_1 en verder x_2 en x_3, behalve voor de waarden van m, waarvoor zij een der waarden $\frac{1}{2}$ en 1 aannemen.

Om deze laatste waarden te vinden, moet men oplossen

1°. $\qquad x_2 = 1 \qquad\qquad x_3 = 1$

Hieraan voldoen de oplossingen verschillend van $2\frac{1}{2}$, die voldoen aan

$$-3m + 2 \pm \sqrt{m^2 + 8m + 4} + 4m - 10 = 0$$
$$\pm \sqrt{m^2 + 8m + 4} = -m + 8$$
$$m^2 + 8m + 4 = m^2 - 16m + 64$$
$$24m - 60 = 0$$
$$m = 2^1/_2$$

de vergelijkingen zijn dus valsch.

2°. Aan $\qquad x_2 = \frac{1}{2} \qquad\qquad x_3 = \frac{1}{2}$

voldoen de van $2\frac{1}{2}$ verschillende oplossingen van

$$-3m + 2 \pm \sqrt{m^2 + 8m + 4} + 2m - 5 = 0$$
$$\pm \sqrt{m^2 + 8m + 4} = m + 3$$
$$m^2 + 8m + 4 = m^2 + 6m + 9$$
$$2m - 5 = 0$$
$$m = 2^1/_2$$

ook deze vergelijkingen zijn dus valsch. Dus stellen x_2 en x_3 voor alle van $2\frac{1}{2}$ verschillende waarden van m oplossingen der gegeven vergelijking voor.

De voorwaarde voor realiteit bij reëele m is

$$m^2 + 8\,m + 4 \geqq 0$$

$$\{m - (-4 + 2\sqrt{3})\}\{m - (-4 - 2\sqrt{3})\} \geqq 0$$

$$m \geqq -4 + 2\sqrt{3} \qquad\qquad m \leqq -4 - 2\sqrt{3}$$

Dit is het antwoord, daar $^5/_{11} > -4 + 2\sqrt{3}$.

III. Gegeven zijn de vergelijkingen

$\frac{x}{y} = \frac{m^2 - 16}{m^2}$ en $m^2x + (m - 4)\ y = (m - 3)\ (m + 5)$.

Druk x en y uit in m en onderzoek voor welke reëele waarden van m

a. x en y beide positief zijn;
b. x en y beide negatief zijn;
c. x en y verschillend teeken hebben;
d. $x - y$ positief is.

Oplossing. De eerste vergelijking is gelijkwaardig met

$$\frac{m^2x - (m^2 - 16)\ y}{m^2y} = 0.$$

Hieraan voldoen de oplossingen van

$$m^2x - (m^2 - 16)\ y = 0$$

behalve die, waarvoor $m = 0$ of $y = 0$.

Substitutie in de tweede vergelijking geeft

$$(m^2 - 16)\ y + (m - 4)\ y = (m - 3)\ (m + 5)$$
$$(m - 4)\ (m + 5)\ y = (m - 3)\ (m + 5)$$

dus, mits $m \neq -5$,

$$(m - 4)\ y = m - 3$$

of, mits $m \neq 4$, $y = \frac{m - 3}{m - 4}$,

Uit de tweede vergelijking wordt nu afgeleid

$$m^2x + (m - 3) = (m + 5)\ (m - 3)$$
$$m^2x = (m + 4)\ (m - 3)$$
$$x = \frac{(m + 4)\ (m - 3)}{m^2}.$$

Daar $y \neq 0$ is ondersteld, ligt het voor de hand, het stelsel vergelijkingen te onderzoeken voor de waarde 3 van m. Het wordt

$\frac{x}{y} = -\frac{7}{9}$ . . . (1) $\qquad 9x - y = 0$ . . . . (2)

Dit stelsel is strijdig, want de eenige oplossing van

$$9\,x + 7\,y + 0 \qquad (3)$$

met (2) is $x = 0$, $y = 0$; en deze voldoet niet aan (1).

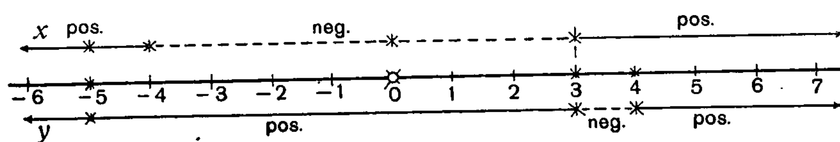
(Terloops zij opgemerkt, dat ook voor de waarde 4 van m de

vergelijkingen strijdig zijn, voor de waarde —5 van *m* zijn zij afhankelijk, terwijl de waarde nul van *m* blijkens den vorm der eerste vergelijking is uitgesloten).

Het antwoord op de eerste vraag moet dus als volgt luiden: *x* en *y* zijn functies van *m*. die voor de waarden —5, 0, 3 en 4 niet zijn gedefiniëerd, maar voor alle andere waarden van *m* worden gegeven door de betrekkingen

$$x = \frac{(m-3)(m+4)}{m^2} \qquad y = \frac{m-3}{m-4}.$$

Ter beantwoording van de overige vragen gaat men het teeken van *x* en *y* na voor verschillende waarden van *m*; zie de figuur, waarin de kruisjes de punten aangeven waarin de functies niet gedefinieerd zijn.



Het antwoord op vraag a luidt: $m < -5$; $-5 < m < -4$; $m > 4$

" " " " b " : $-4 < m < 0$; $0 < m < 3$; $3 < m < 4$

" " " " c " : voor geen enkele waarde van *m*.

Om vraag d te beantwoorden merkt men op, dat, voor de waarden van *m*, waarvoor *x* en *y* gedefinieerd zijn

$$x - y = \frac{-16(m-3)}{m^2(m-4)}.$$

Het antwoord op vraag d luidt dus: $3 < m < 4$.

Vraagstukken als bovenstaande hebben verscheidene goede eigenschappen. Bij de oplossing komt niets te pas, dat op een kunstgreep lijkt, de weg ter oplossing ligt a.h.w. duidelijk voor U. Door nauwgezet redeneeren kunnen de leerlingen alle bijzonderheden ontdekken, er is eigenlijk niets in, wat boven hun begrip gaat. Toch vinden zij deze vraagstukken moeilijk, wat ook begrijpelijk is, daar ze ingewikkeld zijn, en het onderscheiden der verschillende mogelijkheden scherp nadenken eischt.

De vraagstukken I en II zijn ontleend aan Wijdenes, Algebraïsche Vraagstukken II; zij komen in de achtste (laatste) herhaling voor als no. 17. Daar zijn zij, dunkt mij, wel op hun plaats. Aan het einde van den leergang der algebra is het wel nuttig, een paar

minder gemakkelijke vraagstukken eens volledig op te lossen. Maar no. III is een vraagstuk van het eindexamen der hoogere burgerscholen in 1929, en daarvoor lijkt het mij te moeilijk, te ingewikkeld. Ik vermoed dat den voorstellers de onvolledige oplossing voor den geest heeft gestaan, waarvan men de uitkomst in de eindexamenboeken vindt (zie ook Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde XVII, bldz. 198).

Laat ons hopen, dat onder de eindexamen-opgaven der komende jaren nog meermalen een vraagstuk van deze fraaie soort zal voorkomen, maar dan een voorbeeld dat niet zoo ingewikkeld is, dat een gemiddelde leerling slechts een gedeeltelijke oplossing vermag te geven.

NOORDHOFF's WISKUNDIGE WERKEN EN SCHOOLUITGAVEN

DE SCHRIJVERS zorgen voor een degelijke inhoud op de hoogte van de tijd.
DE UITGEVER zorgt voor een onberispelijke uitvoering, typografisch, zoowel als voor papier en band.

De volgende werken zijn:

Studieboeken voor de acte Wiskunde L.O., tevens voor hen, die wat meer willen weten of moeten kennen dan de gewone H.B.S.-stof.

Handleidingen voor den aankomenden leeraar, die van de Lagere Wiskunde gewoonlijk niet meer heeft gezien, dan wat hij zelf op H.B.S. of Gymnasium heeft geleerd.

Lagere Algebra door P. WIJDENES.

Deel I — 3de dr. — geb.; (nieuwe uitwerkingen ter perse) *f* 5.50
Deel II — 2de „ — geb. . . . . *f* 8.50
Antwoorden en uitwerkingen I *f* 2.—; II *f* 2. – (Aanvulling voor de 2e druk *f* 0.40).

Leerboek der Gonio- en Trigonometrie

door P. WIJDENES. 4de druk — gebonden . . . . . . *f* 5.25
Antwoorden en uitwerkingen . . . . *f* 2.50

Leerboek der Vlakke Meetkunde

door Dr. P. MOLENBROEK. 7de dr. door P. Wijdenes. Geb. *f* 6.50
Oplossingen . . . . *f* 2 –

Leerboek der Stereometrie

VOLWASSEN STUDEERENDEN.

DE VERGELIJKING $a \cos \varphi + b \sin \varphi = c$

DOOR

P. WIJDENES.

Wat of daarover nog te zeggen is? Is deze niet op verschillende manieren opgelost, algebraisch, goniometrisch en meetkundig? Inderdaad en bij al deze oplossingen wordt ook nog een bespreking gegeven en worden eenige bijzondere gevallen behandeld, zoodat het onmogelijk lijkt er wat meer of wat anders van te zeggen. Toch is dat wel mogelijk. Nu het begrip van coördinaten al in de tweede klas van de middelbare school wordt aangebracht, terwijl er drie jaar lang op wordt voortgebouwd (zeer terecht blijft het bij laagbouw) daar zal men van het aanwezig zijn van dit begrip zeker in de hoogste klas van H. B. S. of Gymnasium gebruik mogen maken.

Als op fig. 1 OP $= 1$ genomen wordt, dan is de abscis, de x van P, $\cos \varphi$ en de ordinaat, de y, is $\sin \varphi$; dat is: de formule

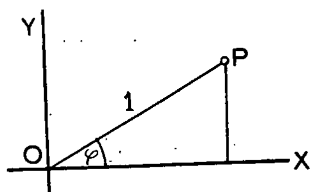


Fig. 1.

$$\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi = 1$$

beteekent voor veranderlijke φ niet anders dan de cirkel $x^2 + y^2 = 1$; en voor $a \cos \varphi + b \sin \varphi = c$ kunnen we zetten $ax + by = c$.

De oplossing van $a \cos \varphi + b \sin \varphi = c$ is dus dezelfde als die van het stelsel vergelijkingen $\begin{cases} ax + by = c \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$.

Wil men het eerst anders doen, ook goed; zet dan $a \cos \varphi + b \sin \varphi = c$ en vraag, door welke betrekking $\cos \varphi$ en $\sin \varphi$ gebonden zijn; „door $\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi = 1$"; men kan dus zetten:

$\begin{cases} a \cos \varphi + b \sin \varphi = c \\ \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi = 1 \end{cases}$. Stel dan „nieuwe onbekenden" nl. $\cos \varphi = x$ en $\sin \varphi = y$ en men heeft hetzelfde stelsel. Men behoeft

er dan geen grafiek bij te halen, hoewel het begrip, dat met $\{f\ (x, y) = 0$ en $F\ (x, y) = 0\}$ het snijpuntenstelsel van beide krommen wordt bedoeld, toch in de Algebra behoorlijk wordt aangebracht.

We gaan dus verder met het stelsel vergelijkingen $\begin{cases} ax + by = c \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$

Eliminatie van y geeft het stelsel

$$\begin{cases} ax + by = c \\ (a^2 + b^2)\ x^2 - 2\,acx + c^2 - b^2 = 0. \end{cases}$$

Men vindt hier dezelfde vierkantsvergelijking als bij de algebraische oplossing van $a \cos \varphi + b \sin \varphi = c$ na het wegwerken van de wortel uit $a \cos \varphi + b \sqrt{1 - \cos^2 \varphi} = c$. Daarover praten we hier natuurlijk niet verder.

Wel zal men volle aandacht kunnen schenken aan de bespreking; men *ziet* immers in de oplossing van $a \cos \varphi + b \sin \varphi = c$ het volgende vraagstuk uit de Vlakke Meetkunde weer opduiken: de onderlinge ligging van rechte lijn en cirkel en dus geen snijpunten, raking of twee snijpunten. De afstand van O tot $ax + by = c$ is $\frac{|c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$; als dus $|c| > \sqrt{a^2 + b^2}$ is, dan geen snijpunten; is is $|c| = \sqrt{a^2 + b^2}$ dan raking en is $|c| < \sqrt{a^2 + b^2}$ dan twee snijpunten. Die afstand kan gewoon worden gevonden als hoogtelijn uit het hoekpunt van de rechte hoek in de rechthoekige driehoek gevormd door de assen en $ax + by = c$.

De bijzondere gevallen zijn ook direct duidelijk; de vergelijking van de rechte wordt dan: $x + y = c$, $x - y = c$, $x + by = 1$, $x - by = 1$, $ax + y = 1$ of $ax - y = 1$. Met de klasse lijkt het me wel aardig werk om de goniometrische oplossing af te lezen uit de grafische.

Zelfs kan men de snijding van rechte en cirkel dienstbaar maken voor een meetkundige oplossing met een zeer goede benadering,

$3 \cos \varphi - 5 \sin \varphi = 4$ wordt omgezet en $\begin{cases} 3x - 5y = 4 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$

Om de rechte lijn te teekenen, zoeken we een paar roosterpunten (3, 1) en (—2, —2); teneinde voldoende nauwkeurig te teekenen. Volgens fig. 2 is $\angle AOS_1 = \varphi_1$ ruim 12° en $\angle AOS_2 = \varphi_2$ bijna 106°. De berekening loopt als volgt $3 \cos \varphi - 5 \sin \varphi = 4$

$\cos \varphi - \frac{5}{3} \sin \varphi = \frac{4}{3}$;

$\frac{5}{3} = \text{tg } \alpha$, dus $\cos \alpha = \frac{3}{\sqrt{34}}$; vermenigvuldiging met $\cos \alpha$ geeft $\cos (\varphi + \alpha) = \frac{4}{\sqrt{34}}$

$$\begin{aligned} \log 4 &= 10{,}60206 - 10 \\ \tfrac{1}{2} \log 34 &= 0{,}76574 \\ \hline & 9{,}83632 - 10 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi + \alpha &= \pm\ 46^\circ 41' \ 9'' \\ \alpha &= 59^\circ \ 2' 10'' \\ \hline \varphi_1 &= - \ 12^\circ 21' \ 1'' \\ \varphi_2 &= - \ 105^\circ 43' 19'' \end{aligned}$$

Fig. 2.

Zooals men ziet, komen deze waarden op fig. 2 vrij nauwkeurig uit. *Voortaan is voor mij deze meetkundige oplossing volstrekte de eenige; alle andere kunnen we over boord gooien.* Ik denk niet, dat er een eenvoudiger oplossing mogelijk is; mocht die er al zijn, dan geef ik toch aan deze de voorkeur, omdat ze „leeft". Eerlijk gezegd ben ik alle „meetkundige" oplossingen van $a \sin \varphi + b \cos \varphi = c$ kwijt, zelfs die in mijn eigen boek. Let wel, dat er staat $a \sin \varphi + b \cos \varphi = c$; in dit stukje heb ik gezet $a \cos \varphi + b \sin \varphi = c$.

Een cosinus toch, waar dan ook, is een *abscis*, een sinus een *ordinaat* (b.v. $\cos \varphi + i \sin \varphi$, bij parametervergelijkingen, bij omzetting in poolvergelijkingen).

Nu we aan grafieken doen in de algebra, is het geboden om bij toepassing in de goniometrie deze in overeenstemming te brengen met de algebra. De meetkundige oplossing, de grafische zoo men wil, van fig. 2 is volstrekt natuurlijk en dat kan men van geen van

de meetkundige oplossingen van $a \sin \varphi + b \cos \varphi = c$ zeggen. Voor de school zou ik er sterk tegen zijn een meetkundige oplossing van $a \sin \varphi + b \cos \varphi = c$ te geven; van $a \cos \varphi + b \sin \varphi = c$, op bovenstaande manier, daar ben ik voor, omdat het zoo'n mooie toepassing is van de „grafieken". Deze zijn er immers niet enkel om prentjes te maken, maar om de wiskundige bewerkingen en waarheden te verluchten en dingen te vertellen, die men zoo gewoon niet ziet en om waarheden door het oog vast te leggen.

De omzetting in $a \cos \varphi + b \sin \varphi = c$ heeft nog een klein nevenvoordeel; als men deelt door a, $\frac{b}{a} = tg\, \alpha$ stelt en daarna vermenigvuldigt met $\cos \alpha$, wordt het eerste lid $\cos (\varphi - \alpha)$, waarvan de oplossing gemakkelijker is neer te schrijven dan van $\sin (\varphi + \beta)$, waarvan men op school terecht de oplossing in tweeën schrijft, terwijl men bij de cosinus na het opzoeken slechts $\pm$ behoeft te zetten.

Ook andere goniometrische vergelijkingen kan men door toevoeging van $\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi = 1$ tot twee vergelijkingen in twee onbekenden maken; mij dunkt echter, dat men daar heel spaarzaam mee moet zijn en dat men het best doet zich in dezen te beperken tot het bovenstaande. De grafische methoden moeten niet te ver gaan en in geen geval er bij de haren bijgesleept worden. Verleidelijk is het wel om nog wat door te gaan b.v. om het aantal wortels (beneden 360°, liever: tusschen —180° en 180°) aan te geven; neem b.v. maar:

$a \cos^2 \varphi + b \cos \varphi \sin \varphi + c \sin^2 \varphi = d$; we hebben direct de omzetting in

$$\begin{cases} ax^2 + bxy + cy^2 = d \\ x^2 + y^2 = 1. \end{cases}$$

Ik praat voor de lezers natuurlijk niet over dit stelsel en voor de school zou ik het vast en zeker nalaten. De grafische behandeling van $a \cos \varphi + b \sin \varphi = c$ is al mooi genoeg, maar die is dan ook mooi; tenminste, naar mijn gevoel.

OVER EEN ELEMENTAIRE AFLEIDING VAN DE WET VAN NEWTON UIT DE WETTEN VAN KEPLER

DOOR

J. C. H. GERRETSEN.

In Euclides Jg 8 afl. 4 pag. 135 geeft de heer Staring een elementaire afleiding van het kinematiese deel van de wet van Newton uit de wetten van Kepler. Het komt mij voor, dat men het daar gevondene gemakkeliker voor de dag brengt met behulp van de hodograaf, waarbij de beschouwingen over de kromming van een ellips en de opvattingen van de elliptiese beweging als een som van twee harmoniese gemist kunnen worden. Ook het energiebeginsel wordt niet gebruikt, de afleiding geschiedt met zuiver kinematiese hulpmiddelen. Bovendien blijft de volgende wijze van behandeling haar geldigheid behouden voor het geval, dat de banen parabolen [1]) of hyperbolen zijn, hetgeen niet gezegd kan worden van de methode van de heer Staring.

Vooraf gaat een inleiding over de snelheidsbegrippen, eendeels ter afronding van het geheel, anderdeels, omdat hieraan in de kosmografieleerboeken gewoonlik niet te veel aandacht wordt geschonken. Verder bewijzen we enige bekende eigenschappen van de ellips, die bij de afleiding gebruikt worden. Ten slotte geven we nog een minder bekende eigenschap van de Keplerbeweging, die analyties enig overleg vordert, maar door de behandeling met de hodograaf haast triviaal wordt.

1. Laat ten aanzien van een zeker koördinatenstelsel met oorsprong O een materieel punt een bepaalde vlakke baan beschrijven. De door de voerstraal bestreken oppervlakte gerekend vanaf een

---

[1]) Bij parabolen worden de bewijsdetails vrij sterk gewijzigd, hetgeen niet te verwonderen is.

zekere as OX is dan een funktie van de tijd. Het punt bevindt zich op een zeker tijdstip t in het punt P van de baan en op $t + \Delta t$ in Q (fig. 1). De oppervlakte van driehoek OPQ noemen we Δ S. Dan verstaan we onder de oppervlaktesnelheid ten aanzien van het genoemde koördinatenstelsel op het tijdstip t de uitdrukking

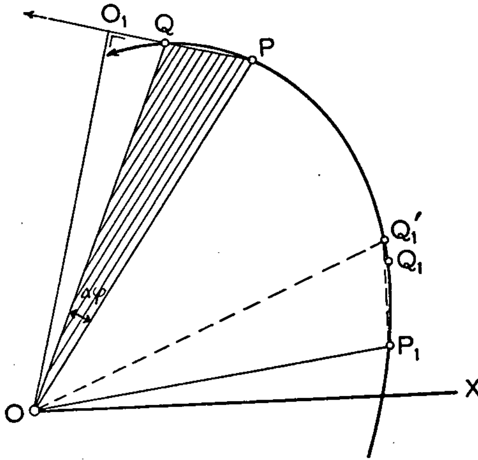


Fig. 1.

(1) $$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = A$$ [2])

Deze definitie kan enigszins gewijzigd worden. Zij nl. OP_1Q_1 de sektor door de voerstraal doorlopen in het tijdvak van t_1 tot $t_1 + \Delta t$. Aan de aanschouwing ontlenen we, dat steeds een punt Q_1' op de baan gevonden kan worden [3]), zodat oppervlakte driehoek OP_1Q_1' = oppervlakte sektor OP_1Q_1 en verder, dat $Q_1' \to P_1$ zodra $Q_1 \to P_1$. Dan

$$A = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\text{opp. driehoek } OP_1Q_1'}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\text{opp. sektor } OP_1Q_1}{\Delta t}$$

m.a.w. in de definitie voor oppervlaktesnelheid kunnen in de plaats van driehoeken sektoren genomen worden. Uit deze laatste formulering volgt dan, dat de perkenwet uitspreekt, dat de oppervlaktesnelheid een konstante is, altans binnen het tijdvak en ten aanzien van dat koördinatenstelsel gedurende welke de perkenwet geldt.

Stelt $\overline{OO_1}$ voor de lengte van de loodlijn uit O op PQ neergelaten, dan is $\Delta S = \frac{1}{2} \overline{PQ} \times \overline{OO_1}$ en dus

(2) $$2\,A = vd$$

waarin v voorstelt de lineaire snelheid in P en d de afstand van O tot de raaklijn in P aan de baan.

---

[2]) Het spreekt vanzelf, dat we de aard der beweging zodanig onderstellen, dat deze en de verder voorkomende limieten bestaan.

[3]) Voor iedere Δt beneden een zekere grens.

Noemen we $r = r_P$ de lengte van de voerstraal naar P en r_Q de lengte van die naar Q, dan is, als $\Delta\varphi$ de ingesloten hoek voorstelt

$$\Delta S = {}^1/_2 r_P\, r_Q \sin \Delta\varphi = {}^1/_2 r_P\, r_Q\, \Delta\varphi \frac{\sin \Delta\varphi}{\Delta\varphi}$$

bijgevolg

(3) $$2\,A = r^2\omega$$

met ω de momentane hoeksnelheid in P.

2. Een punt beschrijft de *hodograaf* van de beweging van een gegeven punt ten aanzien van een zeker koördinatenstelsel, als de radiusvektor van dat punt op ieder tijdstip, genomen vanuit een punt, dat zich t.o.v. het koördinatenstelsel in rust bevindt, gelijk is aan de snelheid op dat tijdstip van het gegeven punt. De gelijkheid is hier bedoeld als vektorgelijkheid. Uit de definities van snelheid en versnelling volgt dan direkt, dat de *snelheid van het hodograafpunt gelijk is aan de versnelling van het gegeven punt op zeker tijdstip ten aanzien van het koördinatenstelsel.*

3. Behalve de eigenschap van de ellips, dat de som der voer-

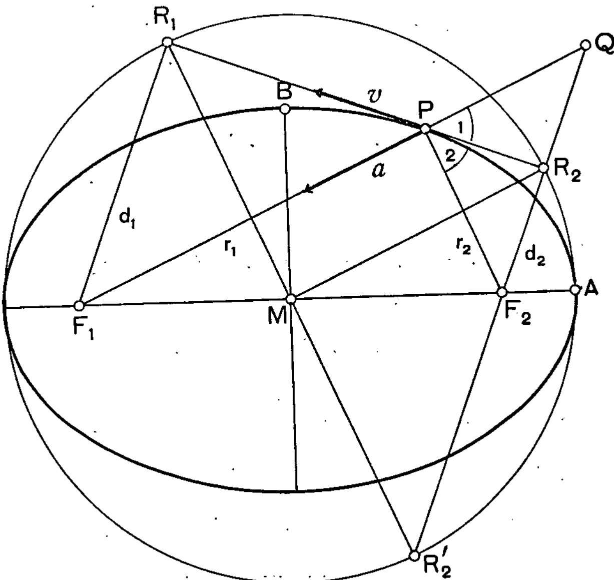


Fig. 2.

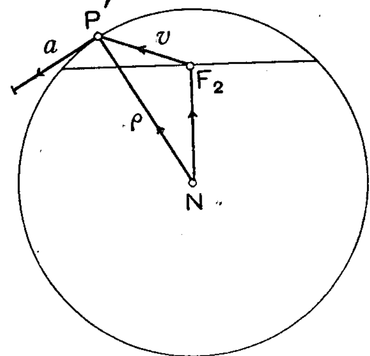


Fig. 3.

stralen tot twee vaste punten F_1 en F_2 een konstante waarde heeft voor ieder punt der ellips en gelijk is aan de lengte der grote as $2\,l$, benevens de hoofdeigenschap der raaklijn en de formule voor de

oppervlakte van een ellips, zijn nog enige eigenschappen nodig, die we nu zullen afleiden. Zij P een punt van een ellips met assen 2 l en 2 k (fig. 2) en brandpunten F_1 en F_2. Verlengen we $\overline{F_1P}$ met $\overline{PQ} = \overline{PF_2}$, dan is wegens $\angle P_1 = \angle P_2$ de raaklijn in P aan de ellips als bissektrix van de tophoek van de gelijkbenige driehoek PF_2Q tevens hoogtelijn en zwaartelijn en deelt dus het lijnstuk $\overline{F_2Q}$ in R_2 loodrecht middendoor. Daar M het midden is van $\overline{F_1F_2}$ is allereerst MR_2 // F_1Q, een eigenschap die we straks zullen gebruiken. Bovendien $\overline{MR_2} = \frac{1}{2}\ \overline{F_1Q} = l$, m.a.w. R_2 ligt op de hoofdcirkel van de ellips. Hetzelfde kan gezegd worden van R_1, het voetpunt van de loodlijn uit F_1 op de raaklijn in P. Spiegelen we R_1 aan M, dan ontstaat een punt R_2' op de hoofdcirkel, dat met F_2 en R_2 in een rechte ligt. Dus $\overline{F_2R_2'} \times \overline{F_2R_2} =$ konstant, of als we $\overline{F_1R_1} = d_1$ en $\overline{F_2R_2} = d_2$ noemen, $d_1d_2 =$ konstant. Door nu P te kiezen in een uiteinde van de korte as vinden we

$$d_1d_2 = k^2. \tag{4}$$

Deze eigenschappen zijn voor het volgende voldoende.

4. Laat nu in fig. 2 de ellips de baan voorstellen van een m.p. t.o.v. een koördinatenstelsel waarvoor de wetten van Kepler juist zijn. Laat verder F_1 het brandpunt zijn, waarvoor de perkenwet geldig is. Dan is volgens (2)

$$vd_1 = 2\,A \text{ of gelet op (4)}$$

$$v = \frac{2A}{k^2}\, d_2 \tag{5}$$

Daar nu $v \perp F_2R_2$ *is de hodograaf een cirkel,* die uit de hoofdcirkel van de ellips ontstaat door een vermenigvuldiging met faktor $\frac{2A}{k^2}$, gevolgd door een rotatie over 90° in de zin der beweging. De straal ϱ van de hodograaf is $\frac{2A}{k^2}\, l = \frac{2A}{p}$ als we $\frac{k^2}{l} = p$ stellen. Terloops merken we nog op, dat de afstand van het middelpunt N der hodograaf tot de pool F_2 gelijk is aan $\frac{2A}{k^2} \times \overline{MF_2} = \frac{2A}{p}\, e$ ($e =$ excentriciteit). Om der wille van de duidelijkheid is in de figuur de hodograaf apart getekend. Verder merken we op, dat in de transformatie van hoofdcirkel in hodograaf het punt R_2 korrespondeert met het punt P′, het uiteinde van de snelheidsvektor. Dus $NP' \perp MR_2$ of $\underline{a}$, de snelheid in P′, dus de versnelling in P is even-

BESTELKAART VOOR BOEKWERKEN

$1^1/_2$ cts.
postzegel

N.V. Erven P. NOORDHOFF'S

Uitgeverszaak.

Postbus 39.

Giro Ned. Bk. No. 1858
Post Giro No. 6593

GRONINGEN.

Ondergeteekende, abonné op { „Christiaan Huygens" / „N. T. voor Wiskunde" / „Euclides" (het vroegere Bijvoegsel) }

verzoekt toezending van 1 exemplaar: *)

WIJDENES, LAGERE ALGEBRA, Deel I, 3e druk,

Geb. à f 4.50, gewone prijs is f 5.50,

door bemiddeling van den boekhandel

direct per post,

....

Naam: Woonplaats:

....

*) Ieder abonné heeft slechts recht op 1 ex. en mits besteld voor 1 Febr. 1933.

wijdig aan MR_2, dus // F_1P. Letten we ook op de zin der beweging, dan blijkt hieruit, dat de versnelling in P afgezet naar F_1 is gericht. Dit bewijs laat niet uitkomen, dat deze eigenschap alleen het gevolg is van de perkenwet, maar heeft in elk geval het voordeel strenger te zijn, dan de gewoonlik in de kosmografieboeken meegedeelde. Daar nu $\underline{a}$ valt langs de radius-vektor van P met F_1 als oorsprong en bovendien steeds $\underline{a} \perp NP'$, is de hoeksnelheid in P' gelijk aan die in P. Dus

$$a = \omega\varrho = \frac{2A\omega}{p}$$

of wegens (3)

$$a = \frac{4A^2}{p}\,\frac{1}{r^2} = \frac{\mu}{r^2} \text{ met } \mu = \frac{4A^2}{p}$$

μ heeft voor alle planeten dezelfde waarde. Immers

$$\mu = \frac{4A^2}{p} = \frac{4\pi^2k^2l^2}{T^2}\,\frac{l}{k^2} = 4k^2\,\frac{l^3}{T^2}.$$

De derde wet van Kepler bevestigt de juistheid van de bewering. Hiermede is het kinematiese deel van de wet van Newton voor de dag gebracht.

5. Ook de formule op pag. 139, uit het energiebeginsel afgeleid, kunnen we gemakkelik rechtstreeks vinden. Daar driehoek F_1R_1P $\sim$ driehoek F_2R_2P ($\angle R_1PF_1 = \angle R_2PF_2$) geldt als we $\overline{F_1P} = r_1$ en $\overline{F_2P} = r_2$ noemen

$$r_1 : r_2 = d_1 : d_2 = d_1^2 : d_1d_2 = d_1^2 : k^2.$$

Hieruit

$$\frac{r_1 + r_2}{r_1} = \frac{d_1^2 + k^2}{d_1^2} \text{ of } \frac{2l}{r_1} = 1 + \frac{k^2}{d_1^2}, \text{ zodat}$$

$$\frac{k^2}{d_1^2} = \frac{2l}{r_1} - 1 = l\left(\frac{2}{r_1} - \frac{1}{l}\right).$$

Laten we nu verder de index aan r_1 weg en letten we op (2), dan wordt de laatste formule

$$\frac{v^2k^2}{4A^2} = l\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{l}\right) \text{ of}$$

$$v^2 = \frac{4A^2}{p}\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{l}\right) = \mu\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{l}\right) \tag{7}$$

de bedoelde formule.

7. Ten slotte willen we als toepassing van de hodograaf bewijzen, dat bij een Keplerbeweging de *snelheid te ontbinden is in een komponent loodrecht op de voerstraal en een komponent loodrecht op de hoofdas van de baan, welke komponenten konstant in grootte zijn.* Immers in fig. 2 blijkt, dat

$$\underline{v} = \underline{\varrho} + \underline{NF_2}$$

is, en ϱ en NF_2 zijn konstant, resp. gelijk aan $\frac{2A}{p}$ en $\frac{2Ae}{p}$.

Meppel, Maart 1932.

BOEKBESPREKING.

Leerboek der Cosmografie, door Dr. H. J. E. Beth. (Groningen, P. Noordhoff, 1932).

Zooals de schrijver in het voorbericht meedeelt, dankt dit werk zijn ontstaan aan den wensch van verschillende docenten, om méér in een leerboek aan te treffen dan hetgeen in het bekende „Beknopt leerboek der Cosmografie" gegeven wordt, d.i. de stof die in één jaar met één lesuur per week behoorlijk verwerkt en vastgelegd kan worden. In het nieuwe boek worden verschillende onderwerpen besproken, die anders slechts tegen het einde van het jaar vrij oppervlakkig ter sprake gebracht kunnen worden.

Het boek is geschreven in overeenstemming met het bekende voorstel der Commissie-Beth betreffende het cosmografieonderwijs, zoodat zijn kenmerk is de streng historische volgorde in de beschrijving en verklaring der verschijnselen. Eerst worden ze beschreven van het standpunt van den Nederlandschen waarnemer uit (hemelbol voor 52° N.B.). Dan volgt een hoofdstuk over de vroegste geschiedenis der sterrenkunde, waarbij in 't bijzonder de tijdrekening besproken wordt, en de voorstelling van een platte, schijfvormige, daarna die van een bolvormige aarde (bij de namen van Pythagoras en Aristoteles zou eenige tijdsaanduiding wel goed geweest zijn). Uitvoerig worden dan behandeld de gevolgen van den bolvorm der aarde. Daarna komt een hoofdstuk over het bloeitijdperk der sterrenkunde bij de Grieken, eindigend met Ptolemaios.

Verder gaande langs de historische lijn, wordt het heliocentrische wereldbeeld (Coppernicus) behandeld, daarna de strijd tusschen beide wereldbeelden. Een kleine opmerking bij het onderwerp verduisteringen (p. 64): is het, om de lengte van den schaduwkegel van de maan te vinden, niet leerzamer uit te gaan van het feit dat we zon en maan vrijwel even groot zien, dan om grootte en afstand, zoowel voor de zon als voor de maan, als uitgangspunt te nemen? Het bedoelde feit komt nu als gevolgtrekking ter sprake bij de bespreking van eb en vloed (p. 106).

De bezwaren, vroeger tegen het stelsel van Coppernicus aangevoerd, worden besproken — dan de bewijzen voor de beweging der aarde; ten slotte het werk van Tycho Brahe, Kepler en Galilei.

Dan komt Newton, en de dynamica der hemellichamen. De wet der perken wordt besproken, en uit de 3e wet van Kepler wordt, in de veronderstelling dat de planetenbanen cirkels zijn, de door de zon uitgeoefende kracht als functie van den afstand bepaald. Ver-

dat de kracht die de maan in haar baan om de aarde houdt, in wezen dezelfde is als de kracht, die een losgelaten lichaam doet vallen.

Verschillende gevolgen van de aantrekkingswet worden behandeld, o.a. de ontdekking van Neptunus, en het verschijnsel van eb en vloed. Bij dit laatste zou ik willen opmerken dat de gegeven verklaring (p. 104), hoewel juist, voor niet-deskundigen onbevredigend blijft, omdat niet duidelijk uitgesproken wordt dat de aarde en de maan om hun gemeenschappelijk zwaartepunt bewegen. Men weet dan n.l. niet goed weg met het stelsel gelijke, evenwijdige krachten, alle naar de maan gericht. Opmerkelijk is, dat bij de bespreking van dubbelsterren (p. 146) zonder nadere verklaring wèl gezegd wordt, van 2 sterren, die in werkelijkheid dicht bij elkaar staan: „In dat geval zou te verwachten zijn, dat de beide sterren tengevolge van de gravitatie een ellips zouden beschrijven om het gemeenschappelijk zwaartepunt van beide"(beter ware: ellipsen). De bespreking van eb en vloed geeft reeds aanleiding deze kwestie onder de oogen te zien.

Hierna treft men een hoofdstuk aan over Instrumenten en Metingen, terecht zeer eenvoudig gehouden. Alleen mis ik de toch niet onbelangrijke mededeeling, dat zeer dikwijls een der assen, waar de kijker om moet draaien, evenwijdig aan de hemelas wordt opgesteld; te meer daar ieder, die wel eens in de gelegenheid is een paar avonden een klasse door een kijker te laten zien, zal zorgen van zijn kijker een equatoriaal te maken, zoowel voor 't gemak als om duidelijk de schijnbare beweging der hemellichamen om de hemelas te laten zien.

Het laatste hoofdstuk bevat een nadere beschouwing der verschillende hemellichamen. De schrijver heeft uit de veelheid der stof een zorgvuldige keuze gedaan, waardoor de hoofdzaken naar voren komen en te groote uitgebreidheid vermeden wordt. Een enkele opmerking: er staat (p. 123): „zoo heeft reeds de vraag, of de zon vast, vloeibaar of gasvormig is, geen zin, omdat deze benamingen verband houden met toestanden waarin we de stof op aarde, dus onder geheel andere omstandigheden van drukking en temperatuur, kennen. Wanneer men dus spreekt van de zon als van een gloeiende gasbol, dan zegt men reeds meer dan te verantwoorden is." Tot op zekere hoogte is dit waar, maar waar het eigenlijk op aankomt, is: welke toestandsvergelijking geldt voor de materie in die op aarde onbekende en onreproduceerbare omstandigheden? Is dit b.v. de wet van Boyle-Gay-Lussac, zooals men vrij zeker voor de „sterreatmosfeer" mag aannemen, en mogelijk ook voor dieper gelegen lagen, dan is er niets tegen, die materie gasvormig te noemen. Verder wordt, m.i. iets te sterk, de voorstelling gewekt dat de zon bestaat uit verschillende, meer of minder scherp door concentrische bolvlakken van elkaar gescheiden, deelen, w.o. fotosfeer en chromosfeer; waarna volgt (p. 124): „het zou de fotosfeer zijn, die wij als een scherp begrensde, volkomen cirkelvormige, schijf op den hemel geprojecteerd zien." Hier is voorzichtigheid geboden: immers is het zeer wel mogelijk, om niet te zeggen waarschijnlijk, dat wat wij als „zonsoppervlak" waarnemen, niet werkelijk een scheiding is tusschen in wezen verschillende lagen.

Jammer is dat van fig. 56 (waterstofbeeld en gewoon beeld van

hetzelfde deel der zonsoppervlakte) één der beelden onderst boven staat.

Over de „kanalen" van Mars wordt gezegd (p. 137): „Degenen, die niet aan het werkelijke bestaan der kanalen willen gelooven, schrijven het waargenomene toe aan gezichtsbedrog, ontstaan door fouten in den loop der lichtstralen in den kijker; ...." Hier had niet mogen ontbreken dat de fout ook in het oog schuilt, zooals de proef van Maunder en Evans (het laten nateekenen, door leerlingen op verschillende afstanden, van een teekenvoorbeeld) ten duidelijkste bewijst. Het is zéér interessant dit experiment met een (natuurlijk niet van te voren ingelichte!) cosmografie-klasse te herhalen.

Doch dit zijn alles bijzaken. De algemeene indruk van het boek is zeer gunstig. Het zal niemand verwonderen dat de stijl zeer helder is; nergens zegt de schrijver meer dan verantwoord is, en zoo noodig wordt duidelijk gewezen op het noodzakelijk onvolledige van een verklaring of een afleiding. Er is een beperkt gebruik gemaakt van formules; de beknoptheid (waarvoor den schrijver alle lof toekomt) veroorzaakt nergens onduidelijkheid. Bijzonder geslaagd zijn de meer geschiedkundige hoofdstukken, en in 't bijzonder valt nog het laatste hoofdstuk te roemen, waarvan de lezing, volgens de bedoeling van den schrijver, aan den belangstellenden leerling kan worden overgelaten.

Het boek is, zooals mede vanzelf spreekt, ook wat de illustraties aangaat, goed verzorgd. Velen zal het ongetwijfeld welkom zijn.

Indien ik nu nog een opmerking wil plaatsen, dan betreft deze niet de uitvoering van het werk, maar het beginsel dat er aan ten grondslag ligt.

Het lijkt mij n.l. een groot bezwaar van de systematisch historische behandeling, dat de geocentrische en de heliocentrische voorstellingswijzen te veel gescheiden blijven. M.i. is niets noodzakelijker voor den beginneling dan om zich elk verschijnsel aan den hemel van beide standpunten uit voor te stellen — dit kost zèèr veel moeite aan de meesten, en hoe eerder ze er mee beginnen, hoe beter. Eerst daarna kan de historische behandeling nuttig zijn.

Daar komt bij dat de leerlingen, als ze in de 4e klasse beginnen met cosmografie, reeds lang weten dat de aarde om haar as draait, en zich in een baan om de zon beweegt. Dit stelselmatig in de eerste maanden te negeeren, lijkt mij niet gewenscht. Hun, die al vele jaren aardrijkskunde gehad hebben, lijkt het gezocht de polen der aarde te hooren definieeren als de snijpunten van de hemelas met den aardbol, en de aardas als de verbindingslijn dier polen (p. 39). Bovendien is de beschikbare tijd te kort om niet zooveel mogelijk gebruik te maken van wat de leerlingen reeds weten. Dit is bijster weinig van geocentrisch standpunt: meestal is het beperkt tot de wetenschap dat de zon opkomt en ondergaat. Niet allen weten dit van de maan! En helaas is er zoo goed als geen gelegenheid om ze door gezamenlijke waarnemingen 's avonds te laten ontdekken en verwerken de feiten, die in hoofdstuk I, als ontleend aan de ervaring, besproken worden. Daardoor wordt het doel: de wereld eerst te beschouwen zooals de Ouden het deden, toch niet bereikt; alles wat

met den hemelbol samenhangt blijft gekunsteld. Men wint tijd door uit te gaan van de heliocentrische gedachte, die ze eenigszins kennen; daaruit af te leiden wat een aardbewoner zal waarnemen, en dit te controleeren op de enkele avonden die voor astronomische waarnemingen benut kunnen worden. Ik geef dadelijk toe dat deze methode minder mooi is in theorie, maar ik geloof, dat er in de praktijk meer van terecht komt.

Maar ook hij, die het boek niet geheel methodisch wenscht te volgen, zal het uitstekend als leiddraad kunnen gebruiken. Het is in elk geval een boek waar degenen, die zich voor de sterrenkunde interesseeren, ook nà het jaar cosmografie veel aan kunnen hebben als inleiding tot uitvoeriger werken.

Wageningen. A. J. Staring.

Dr. D. F. du Toit Malherbe. — Vakwoordeboek Engels—Afrikaans en Afrikaans—Engels. (De Bussy, Pretoria en Dusseau, Kaapstad). — Prijs: deel I *f* 11; deel II *f* 8,5; samen *f* 18).

Het jonge Zuid-Afrika, strijdend voor Dietsche taal en beschaving, heeft ons reeds verrijkt met onvergetelijke dichtkunst. Maar nu schijnt het oogenblik aangebroken, waarop het ook in ons wetenschappelijke leven een plaats begint in te nemen. Hier ligt een prachtig vakwoordenkboek vóór ons, dat een behoorlijke grondslag is voor verdere publicaties in het Afrikaansch, maar dat daarenboven voor Vlaanderen zoowel als voor Holland van groot nut zal zijn. Waarom voor Holland? — Omdat het ons helpt bij het kiezen eener keurige terminologie; omdat het ons nieuwe woorden aanbrengt voor dingen, die in onze taal niet benoemd waren; en omdat het een uitstekend vertaalwoordenboek is voor elk Nederlander, die Engelsche vakboeken leest of schrijft. Zooals uit de voorrede blijkt, is er inderdaad op gerekend, dat ook Hollanders dit woordenboek zullen gebruiken; maar ik spreek tevens de hoop uit, dat dit voor Vlaanderen zóó belangrijke boekwerk ook daar ingang zal vinden. Voor wien het niet weten mocht, zij hier nog eens met nadruk gezegd, dat Afrikaansch praktisch hetzelfde is als Nederlandsch, en zonder meer door ieder onzer te begrijpen is.

Dit is het eerste vakwoordenboek in onze taal dat op zulke groote schaal opgezet is. Niet minder dan vijf-en-twintig specialisten hebben eraan meegewerkt; volgens de lijst der medewerkers zijn vertegenwoordigd: natuurwetenschappen, wiskunde, landbouw en veeteelt, geneeskunde, techniek, geschiedenis en muziek. Ik heb er mij echter van overtuigd dat ook talrijke termen uit de beeldende kunsten, de phonetiek enz. opgenomen zijn. Zelfs zeer moderne benamingen ontbreken niet. De terminologie is in het algemeen gematigd puristisch, gelukkig iets meer dan wat men in Holland gewoon is; men heeft meestal het internationale woord naast het Afrikaansche aangegeven.

In het algemeen lijkt mij dat het Afrik.—Eng. en Eng.—Afrik. beter met elkaar in overeenstemming gebracht moesten worden.

Verder zijn de schrijvers soms gaan *verklaren* in plaats van *vertalen* ("equipotential surface = oppervlak met konstante potentiaal orals"). Dit heeft soms geleid tot flaters als: „blomskermdraende plant = foeniculum" [1]), die te begrijpen zijn uit de andere helft van het woordenboek: „foeniculum = blomskermdraende plant."

Er zijn nogal eenige slordigheden en onvolkomenheden, die echter onvermijdelijk zijn bij zulk een eerste poging. „Photosphere" is geen „ligkring om de zon", „dominant" geen „bowetoon",. „diatomaceae" geene „infusorieë", „chrysanthemum" geen „aster". Waar de vertaling sterk van het Nederlandsch afwijkt, is ze wel eens ongelukkig uitgevallen: „aberration = afwijking", met „spherical ab. = bolvormige afw.", en daarnaast „deviation = afwijking". Voor diffraction" mist men „buiging", maar er staat „straalbreking", terwijl ook „refraction = straalbreking". „Resolving power", vindt men niet, tot men toevallig komt op „diffraction grating resolving power = opbrekingsvermoë van traliespieël", alsof alleen een tralie oplossend vermogen had; „traliespieël" is verkeerd, waar er ook doorlatingsroosters bestaan; en is „opbrekingsvermoë" beter Afrikaansch dan oplossend vermoë?

Ik zou dus deze voorbeelden kunnen vermenigvuldigen. Maar dan zou ik een verkeerden indruk geven van een boek dat toch zeer mooi is, goed bruikbaar, en waarvan de samenstelling veel arbeid kostte.

M. Minnaert.

---

1) De Latijnsche naam van vinkel.

INGEKOMEN BOEKEN.

Van P. NOORDHOFF — Groningen:

Dr. B. P. HAALMEIJER. *Leerboek der Vlakke Meetkunde I.* **2e druk,** geb. . . . . *f* 2,50

P. WIJDENES, *Algebra voor MULO II B.* Examen uitgave. **10e druk,** geb. . . . . *f* 2,25

P. WIJDENES, *Beknopte Meetkunde II.* **6e druk,** gec. met overzicht . . . . *f* 1,70

P. WIJDENES, *Beknopte Rekenkunde,* **2e druk,** ing. *f* 2,— gebonden . . . . *f* 2,50

P. WIJDENES en Dr. H. J. E. BETH, *Nieuwe Schoolalgebra I,* **6e druk,** gec. . . . . *f* 2,25

M. G. VAN TOL, *Stelsels van bikwadratische ruimtekrommen ruimtekrommen van de eerste soort.* Academisch proefschrift.
